

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧ લો.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગુજરાતી કૉપીરાઈટ વિભાગ]

અનુક્રમાંક ૮૫૮૫ વર્ગિક

પુસ્તકનું નામ જાણ્યો ભૂમિતિ

વિષય ૪૨. ૨૪૬૧. ૧૦૦

DEPARTMENT OF PUBLIC INSTRUCTION, BOMBAY.

NEW GEOMETRY

PART 1.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,

First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B. A.

Teacher, Training College for men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B. A., S. T. C.,

Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

4TH EDITION.

10,000 COPIES.

PUBLISHED BY

**Karsandas Narandas & Sons,
BOOKSELLERS & PUBLISHERS, SURAT.**

All rights reserved.

1919.

PRICE 10 ANNAS.

Published by
Karsandas Narandas & Sons.
Nanavat, SURAT.

Printed by
Thakordas Mansing at the Surat City Printing Press,
near Chauta Bridge, opp. Post Office, Surat.

મુંબઈ ઇલાકાતું સરકારી કેળવણી ખાતું.

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો



મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એ. જી.,
ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,

અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,
શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફાર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજ સપ્તે, બી. એ., એસ. ટી. સી.,
અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ., એસ. ટી. સી.,
શિક્ષક, પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ ૪થી.

પ્રત-૧૦,૦૦૦.

સને ૧૯૧૯.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

કરસનદાસ નારણદાસ એન્ડ સન્સ,
નાણાવટ, મુરત.

સરકારે સર્વ હક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

કિં. ૦-૧૦-૦.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
અમદાવાદ
ગુજરાતી કૉપીરાઈટ-સંગ્રહ
૮૭૮૫

મુરત ચૌરાના પૂલ ઉપર થોસ્ટ ઓફિસની સામે
“ મુરત સીટી ” પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
હાકોરદાસ માનસિંહે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.



ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં ‘નવી ભૂમિતિ’* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડફ્રે અને સિડ્નસ, બર્નાર્ડ અને ચાઇલ્ડ, પિયરપોઇટ, એગર, વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ધણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ધણા આભારી છે.

ગ્રંથકર્તા.

* નવી ભૂમિતિ—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિત-શાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ધણા વખત પહેલાં હાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર હાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ હાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.



જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્ધાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહિતી ધ્યાન દઈને વાંચવી, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાબતો, ખુણા, વગેરે મપાવી ને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવાવાની જરૂર છે; તેથી ૯થી ૧૧૫ સુધીનાં પાનાંમાંના પ્રાયોગિક ભાગ કાળજીપૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય, તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો બરાબર સમજવા માટે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર બરાબર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કાઢાવવી. આકૃતિ બરાબર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે બૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડીમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કાઢાવવી. વ્યાખ્યા

છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાનાં હોય છે, તેમની સહાયતા જોડે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખવતી વખતેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો શંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સહાયતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી કરી કરાવવો, અને તેવો અનુભવ કરાવ્યા પછી “હવે એજ યામત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ” એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.



અનુક્રમણિકા.

	પૃષ્ઠ.
ઉપોદ્ધાત...	૧-૮
ખંડ ૧લો (પ્રાયોગિક ભાગ)...	૯-૧૧૬
પ્રકરણ ૧લું.	
૧ લીટીઓ માપવા વિષે ...	૧૦
૨ સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ ...	૧૬
૩ ખુણો...	૨૧
૪ સાક્ષેપ દિશા ...	૪૨
૫ અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે ...	૪૪
૬ એક લીટી ખીજ પર પડવાથી થતા ખુણા...	૪૬
૭ એક ખીજને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા...	૫૦
૮ સમાંતર લીટીઓ...	૫૨
૯ ત્રિકોણ...	૬૩
૧૦ લંબ ...	૮૯
૧૧ સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણ ...	૯૨
પ્રકરણ ૨જું.	
ભૂમિતિ એટલે શું ? ...	૧૦૦
પદાર્થ ...	૧૦૧
લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ ...	૧૦૨
પૃષ્ઠ ...	૧૦૨
સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ...	૧૦૪
સપાટી ...	૧૦૬
લીટી...	૧૦૮
ખિંદુ ...	૧૧૪
ખંડ ૨જો (પ્રમેય ૧-૨૫) ...	૧૧૭-૧૭૫
ખંડ ૩જો (કૃત્ય ૧-૧૩) ...	૧૭૭-૧૯૭
પરિશિષ્ટ અ (પરચુરણ પ્રશ્ન) ...	૧૯૭-૨૦૮
પરિશિષ્ટ બ (પ્રશ્ન છોડવાની પૃથક્કરણ પદ્ધતિ)...	૨૦૯-૨૧૫
પ્રશ્નોના ઉત્તરો ...	૨૧૬

શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ.	સીડી.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
(અનુક્રમણિકા)	૮	સાક્ષેપ	સાપેક્ષ
(કેપોટ્લાત)	૫	આવે	આવી
૧૫	૨૩	ભાજકને	વિભાજકને
૬૧	૨૨	પૃ૦	પુ૦
૮૪	૭	પાનાં	ખાનાં
૧૦૬	૧૧	તેમને	તમને
૧૨૦	૭	ઈકફ	ઈકફ
૧૫૭	૨૭	અમણાઈ	ની અમણાઈ
૧૬૩	૧૫	ત્રિકોણની	ત્રિકોણના
૨૦૫	૨૭	પબ=પક	પબ+પક

ઉપોદ્ધાત.



નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય-સિદ્ધાંત) અનુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવે છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય-સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમો) વિગતનપદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતો પરથી - સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતોનો ક્રમ યુક્લિડથી સહેજ જુદો છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્લિડમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હોય એવા સિદ્ધાંતો કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિઓ બરાબર દોરવી ધણી અવશ્યની ગણી છે.

આ ફેરફાર કરવાનાં કારણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) ફોટો શી રીતે લેવો તેની માહિતી આપણને કોઈ મોઢેથી આપે, તો તે બરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થોડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. જો તેજ માહિતી આપણને પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ વડે કોઈએ આપી હોય, તો તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે ઓછામાં ઓછા એક અઠવાડીઆ સુધી તો ભુલાશે નહિ. પણ તેજ પ્રયોગ આપણે પોતાને હાથે કરીએ, તો તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સમજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આસરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કોઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે બાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવો તફાવત પડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ હાથ પડે છે. આ ઉપરથી એવો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે, કે કોઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી થાય છે.

અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પોતાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાકું થાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રયોગ વિદ્યાર્થી-એ જાતે કરવા અવશ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યાનદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણાજ કઠણ ગણાતો હતો એ વાત ખાતરીપૂર્વકજ સિદ્ધ કરી આપે છે, કે આ વિષય શીખવવાની જીની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને કઠણ હતી. ‘કાટખુણો,’ ‘સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ,’ વગેરે મંજામાં, અથવા ‘ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે,’ એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના “પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો” એમ કહ્યું હોત, તો (યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકના ૩૨ સિદ્ધાંત જેમને ચાલ્યા છે એવા વિદ્યાર્થીઓ પાકી) કેટલા થોડા વિદ્યાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જીની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું આકૃતિના ધર્મોનું જ્ઞાન ઘણુંજ અધુરું રહેતું અને ઘણા ખરે વિષય તેમને ગોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કરાવવા એજ એક ઉપાય છે. સમાંતર લીટીઓને છેદતી લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત યુક્લિડના ૨૮મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કહ્યા પછી જેટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિદ્યાર્થીઓ પોતાના હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જીએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિદ્યાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ

બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ એ બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે:- પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોના સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન ક્યાં પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની બુદ્ધિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર હોય છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતા સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય, તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી થતા અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજા સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું બરાબરું

નક્કી કરવાની રીત પણ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈ પણ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે: એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમના આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ ગુદાં ગુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અગ્નાને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખતે ખોટો પડે છે. પરંતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈએ તેટલાં ગુદાં ગુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો ઠરવાનો સંભવ ઘણો યોડો હોય છે. માટે ખરા સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહિતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈકોઈ વખતે તો મળતાં પણ નથી, અને કોઈકોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે

ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદૃશ્ય વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણસ કેવાં લક્ષણવાળો હશે, ક્યારે જઈએ તો અમુક માણસ નક્કી ઘેર મળશે,.....વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણ માહિતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે યુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે બાબતોમાં યુક્લિડથી જુદાપણું:—

અસાધારણ ખુદ્ધિવાળા કોઈ પણ પુરુષે કરેલું કામ સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણસે કરેલું કામ ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર, શેક્સ્પિયર, કાળિદાસ, એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટોટલ, હાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ, ઇત્યાદિ પંડિતોના તાર્કિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો કે અદ્વિતીય છે, તોપણ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્લિડની ભૂમિતિમાં પણ છે. તોપણ યુક્લિડમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્લિડની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક ખુદ્ધિમાન ઇંગ્લેન્ડે એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર કર્યો હોય, તોપણ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ઘણો ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેવીજ સ્થિતિ યુક્લિડની ભૂમિતિની છે. યુક્લિડે સિદ્ધાંતોના જે ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે સારો છે, તોપણ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવો જરૂરનો જણાયો છે.

દાખલા તરીકે—યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકમાંના ૨ અને ૩ એ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે. ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫, એ સિદ્ધાંતો સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી તે પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડભરેલું છે. તેમજ યુક્લિડના પહેલા પુસ્તકમાંના ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો ૧૩મો સિદ્ધાંત, એમની જે સિદ્ધતા યુક્લિડે આપી છે, તેના કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપવી બની શકે એમ છે.....વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્લિડની ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ જોઈ શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ, માપવાની પટ્ટી, વગેરેની મદદથી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે:—

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જો આ વિષયમાં ‘સમયાન્તુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,’ ‘આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,’ ‘આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,’ વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમયાન્તુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરચોરસ ચતુષ્કોણ, વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો સમયાન્તુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે, લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે, ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજાને છેદે છે, સમાંતરચોરસ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે, એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જો આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજાતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના બરાબરના વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—‘એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખા હોય છે,’ આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે

ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તો તે ખુણાની સામેની બાજુઓ નાની મોટી આવશે; અને તેમનું નાનામોટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખી કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા, સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરી છે.

આકૃતિઓ બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટ્ટી, વગેરે સાધનોની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનોનો ઉપયોગ કરવો, એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્લિડમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનોથી આકૃતિઓ કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિઓ દોરી છે, એમ ધારી લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હતો. નવી ભૂમિતિમાં તો એવી ઘટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં ખીજાં (ગૌણ) લક્ષણો નીચે મુજબ છે:—
 (૧) કોઈ પણ વિધાનના આધાર માટે ‘ફલાણો સિદ્ધાંત’ એમ કહી સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીઓ સિદ્ધાંતોના ક્રમાંક ગોખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેઓ જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે ક્યાં કારણોનો આધાર છે તેનું તેઓને જ્ઞાન હોતું નથી. ‘જ્ઞ ખુણો = જ્ઞ ખુણો,—આધાર ૨૯મો સિદ્ધાંત’—એવું એક વખતે ગોખી રાખ્યું હોય, તો એક ખુણો ખીજા ખુણા બરાબર છે એમ કહેવા માટે ક્યાં કારણોની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા ખરે જોતાં બરાબર ન હોય તોપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે ૨૯મા સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છોકરાના મોઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છોકરાઓ પાસે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તોપણ આધાર હંમેશાં એવી

રીતે આપવો જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછો વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ, એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છૂટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકનું આપ્યા છે; પણ જગાનો બચાવ કરવા માટેનું એમ કયું છે. તેનું અનુકરણ શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ:—

અ ખુણા બ ખુણા બરાબર છે, અથવા કયી મોટા છે, એમ લખવાને બદલે \angle અ $=$ \angle બ, અથવા \angle અ $>$ \angle બ, એમ લખવું સહેલું અને તે વધારે વ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સંમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે ‘પ્રત્યક્ષ’ અને ‘સહેજ સમજાય એવી’ હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.



સૂચના—ભૂમિતિના વિષયની માહિતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના ૧લા ખંડમાંની માહિતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કદાચ પ્રમાણ વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનો.

માપ લેવાની પટ્ટી.—જેના પર ઇંચ અને ટેસિમીટર, તથા તે ખંતેના અંશ અથવા ભાગ બતાવેલા હોય એવી પટ્ટી [જે પટ્ટીના એકજ પૃષ્ઠની બંને કોરો ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ બતાવ્યા હોય એવી પટ્ટી વધારે સારી.]

સેટ સ્કવેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦° , ૬૦° , અને ૩૦° ના હોય, અને જેનો કર્ણ (સૌથી લાંબી ખાણ) આસરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦° , ૪૫° , અને ૪૫° ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ ચાલે.]

વિભાજક (જેનાં બંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને કંપાસ (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ ખોસાય છે તે)—[જેમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીઉં બેસાડી શકાય એવા કંપાસ હોય તો જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ પેન્સિલ.—૨ એચ કે ૩ એચની પેન્સિલ હોય તો વધારે સારું. બની શકે તો ૩ એચની પેન્સિલનો ઉપયોગ કરવો.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પાલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સોયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કોણુમાપક.—(પ્રોટ્રેક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપક કરતાં ચતુષ્કોણુ કોણુમાપક વધારે સારો ખરો; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપકનો ઉપયોગ કરવો સહેલો પડે છે, માટે તેનોજ ઉપયોગ કરવો.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનો કાગળ, ચોરસ આંટલી એક્સસાઇઝ બ્લોક,* દોરો, ટાંકણી, વગેરે.

[પ્રયોગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થીઓએ એક જુદીજ નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવાં]

લીટીઓ માપવા વિષે.

લીટીઓ માપવા માટે પટ્ટી અને વિભાજક વપરાય છે.

માપ લેવાની પટ્ટી (અથવા કુટપટ્ટી અને મીટરપટ્ટી)—આ પટ્ટી પર એક કોરે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કોરે મીટરના+

* ભૂમિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

+ **મીટર**—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હોવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નડે છે. લોકોને આજ ઘણાં વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરંતુ આ કામ માટે ફ્રેન્ચ સિવાય બીજા કોઈ લોકો આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આસરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુદાં વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગ્યાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ યોજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કોઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક ચામ્યોત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈવું

ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક મીટર એટલે આસરે ૩૯.૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિમીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર, એવા ભાગ છે. પટ્ટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ટક.

(મિલિમીટર = $\frac{1}{1000}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર = ૧ સેન્ટિમીટર ($\frac{1}{100}$ મીટર)

૧૦ સેન્ટિમીટર = ૧ ડેસિમીટર ($=\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ ડેસિમીટર = ૧ મીટર

૧૦ મીટર = ૧ ડીકામીટર (= ૧૦ મીટર)

૧૦ ડીકામીટર = ૧ હેક્ટોમીટર (= ૧૦૦ મીટર)

૧૦ હેક્ટોમીટર = ૧ કિલોમીટર (= ૧૦૦૦ મીટર)

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો ખીલકૂલ ઉપયોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટ્ટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીટરના ભાગ છોકરાઓ બરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીત:—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા

મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા ચામ્યોત્તરવૃત્તનો $\frac{1}{10000000}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યા છે. દાખલા તરીકે—આર અથવા ૧૦૦ ગ્રામ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે. એક ઘન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯.૨ ફેરેનહાઈટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે ગ્રામ, તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને લિટર અથવા એક ઘન ડેસિમીટર એ અત્યંત વગેરેના ભરતક્ષના માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

ધારો કે અઘ લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ
ઘડ લંબના ડ ટિંડુ પાસે હશે, તો ઘ છેડો ર ટિંડુની નીચે દેખાશે,
અને અઘ લીટીની લંબાઈ ફર જેટલી લાગશે; જો આંખ ક સ્થાનમાં
હશે, તો અઘ લીટીની લંબાઈ ફલ જેટલી લાગશે; આંખ ક સ્થાને
હશે, તો અઘની લંબાઈ ફય જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. અઘ લીટીની લંબાઈ ઇય અને મિલિમીટરમાં માપો.*
અ—————ઘ

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇય અને મિલિ-
મીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર
આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩.૯ ઇંચ
રાખો, અને તે અણીઓ પટ્ટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને
તેમાં કેટલાં સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટ્ટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની
લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

૫. અક, કઘની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો
કરો. પછી અઘની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ બરાબર છે કે
કેમ તે જુઓ.

અ—————ક—————ઘ

૬. અક, કઘ, ડઘની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો
સરવાળો કરો. પછી અઘની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર
છે કે નહિ તે જુઓ.

* લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં માપવામાં આવે છે.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને કપલા અ ક હ વ
 અને પ્રશ્નના જવાબ કાઢો.

૭. અવ લીટીની લંબાઈ માપો. અવની લંબાઈ માપીને તે અવમાંથી બાદ કરો, એટલે કવની લંબાઈ નીકળશે. કવની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંના જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

અ ક હ વ

૮. ૨.૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમના સરવાળો કરો, અને તે ૨.૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. અવ લીટી ૪.૫" * લો. તેમાં અક=૧.૨", કહ=૨.૬" લઈને હવની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬.૬"ની લીટી લો. તેના ૧ : પના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧-૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તોપણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (૫૦)×

૧૨. ૩.૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

* " આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧.૨" એટલે ૧.૨ ઇંચ.

— X ૫૦=પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત બરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

૧૩. ૩૩ મિ. મી. + લીટી લઈને તેના ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા એ ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢે. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. અવના અટકળથી સરખા એ ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (૫૦)

૧૫. અવના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. અવના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

(જવાબ સાધારણ રીતે બરાબર આવે ત્યાંસુધી વિદ્યાર્થીએ ઉપર પ્રમાણે લીટીઓની લંબાઈ અટકળથી માપવાનો મહાવરો કરવો.)

લીટીઓ દુભાગવા વિષે.

આપેલી લીટીના એ સરખા ભાગ કરવાની સ્થૂળ રીત:—

વિભાજકની અણીઓ આપેલી લીટીની અર્ધા લંબાઈ જેટલે અંતરે આસરે રાખવી. લીટીને વિભાજક લગાડીને આપેલી લીટીના એ સરખા ભાગ પડે છે કે કેમ તે જોવું. પડતા હોય તો ઠીકજ છે; પરંતુ પડતા ન હોય તો જે તકાવત પડે તેના અર્ધા ભાગ વિભાજકની અણીઓની વચ્ચેના અંતરમાં જરૂર જણાય તેમ વત્તો કે ઓછો કરવો.

દાખલા તરીકે:—અવ લીટીના એ સરખા ભાગ કરવા છે. તેના આસરે અર્ધા ભાગ જેટલે અંતરે વિભાજકની એ અણીઓ રહે એટલો વિભાજક પહોળો કરો, અને તે અવ લીટી પર મૂકો. ધારો કે તે એ અણીઓ અ અને ગ પર પડે છે. એમજ બીજી વાર ભાજકને ગ બિંદુથી શરૂ કરીને મૂકો એટલે બીજી અણી ક પર પડશે.

આ બે ભાગ મળીને આપેલી લીટીથી ઝોછા થાય છે, માટે બાકી રહેલા (કચ અક્ષરથી દેખા:-

ડેલા) અંતરના અર્ધ જેટલી (કહ જેટલી) વિભાજકની



અણીઓ વધારે પહોળી કરવો. એટલે પહેલાં વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે કાગ જેટલું અંતર હતું તે અંતર હવે ગહ જેટલું થશે. હવે વિભાજક લીટી પર મૂકશો તો તેની બે અણીઓ પહેલી વખત અને હ પર, ને બીજી વખત હને બ પર પડી રહેશે. એટલે અચ લીટી હ બિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી દોઢ પણ લીટીના, જે સંખ્યા બેનો ધાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩.૨", ૪.૩", ૨.૯", ૩.૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત:-અચ લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી અચ લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે અ છેડે બ ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨.૫", ૩", ૩.૭", ૩.૩", ૪.૯"...લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

રહેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા હુટ છે ?

“ચાર ફુટ.” એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટી-આની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે? “આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે.” આ ઉપરથી પાટીઆની લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની? “ચાર ફુટ.”

આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહોળાઈ માપો. તે કેટલી છે? “અર્ધો ઇંચ.” આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહોળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે? “ચાર ફુટ.” આ કેમ સમજાયું? “પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તો અર્ધો ઇંચ પહોળાઈ પણ ૪ ફુટ દર્શાવે છે.”

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દોરેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશો કે? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હોવી જોઈએ? “ચિત્ર અને ટેકરી એ બેની ઉંચાઈનું પ્રમાણ.”



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ, પહોળાઈ, વગેરે) અને ખરું અંતર એ બેની વચ્ચેના પ્રમાણને અંતરપ્રમાણ (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હોય તો આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરું પરિમાણ શું છે તે જણાશે કે? “ના.” હીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હોય તેટલી મોટી દોરવા જઈએ તો શી અગવડ પડે? “.....”

વસ્તુ જેટલા કદની હોય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દોરી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, ધણાજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રોની મદદથી (ફોટો વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હોય, તોપણ તે નરી આંખો વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી

નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મોટી દોરવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મોટા હોય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જેટલી મોટી દોરવા માટે ઘણાજ મોટા કાગળ લેવો પડશે; માટે તેમની આકૃતિ તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઇંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{1}{32000000}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{2}{32000000} = \frac{1}{16000000}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{3}{32000000}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય;...વગેરે,

પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર જાણો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાચી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ, વગેરે.

૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧" : ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે, તો તેની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* ' આ નિશાની ફુટ માટે છે. દાખલા તરીકે ૫' = ૫ ફુટ.

૩. પાસે દેખાડેલા કુંગરની ઉંચાઈ કાઢો. સ્કેલ

$૧''=૧૦૦૦'$.



૪. એક માઇલ માટે એક ઈંચ પ્રમાણુ લઈને જેમની વચ્ચે $૨\frac{૧}{૨}$ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. $૧''=૨$ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો રસ્તો કાઢો.

૬. $૧''=૧$ માઇલ, આ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર ૨.૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. $૨''=૧$ યાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને $૪૫''$ ઉંચી લાકડી ઉભી લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના--નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં જોઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. $૫૦૦'$ લાંબા અને $૧૦૦'$ પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણુ ૧ સે.મી. $\times=૧૦૦'$.)

૯. $૩૨૨'$ લાંબા અને $૧૮૨'$ પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણુ ૧ સે.મી. $=૧૪'$.)

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે $૪૦૦'$ અને $૩૦૦'$ છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની જડાઈ $૧૦'$ છે, એવા તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણુ $૧''=૧૦૦'$.)

૧૧. ચક્ર સીઠી અડ ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે. અ ભીંતનો પાયો છે. હવે અબ= $૬'$ અને અક= $૮'$ હોય તો સીઠીની લંબાઈ કેટલી?+

\times સે. મી.=સેન્ટીમીટર.

+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ લીટી માપીને સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણુ સગવડ પ્રમાણે ગમે તે લેવું.

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં અવ અંતર ૯' અને અક્ષ ૪૦' હોય તો સીદીની લંબાઈ કેટલી?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી ઓરડીના ભોંયતળીઆની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા બે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[સૂચના—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ, આ પાસપાસેની બધી દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિદ્યાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ બરાબર પૂર્વમાં ૮૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી બરાબર ઉત્તર તરફ ૫૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આધો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ આ આગળથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી બરાબર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી બરાબર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને જ સ્થળે પહોંચે છે; તો અવ વચ્ચે અંતર કેટલું?

૧૬. બ, અની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે; ક, બની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે; ઢ, કની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો અથી ઢ કેટલો આધો છે?

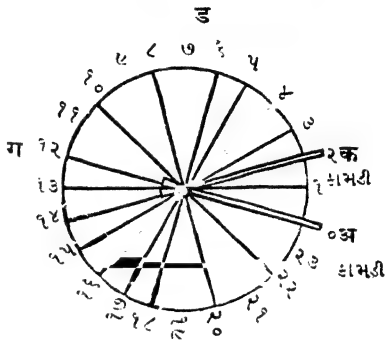
૧૭. અની પૂર્વમાં ૬ માઇલ છે; બની દક્ષિણમાં ૨ માઇલ છે; કની ઈશાનમાં ૩ માઇલ છે; ઢની વાયવ્યમાં ૪ માઇલ છે; તો અથી ઈ કેટલા માઇલ આધો છે?

૧૮. અથી ૬ પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે; અને ક સ્થળ અની બરાબર ઈશાનમાં અને બની બરાબર વાયવ્યમાં છે; તો કરું અથી અંતર કેટલું?

ખુણો.

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ પર ચોટાલા વાંસની બે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક છેડામાં કાણું પાડો, અને કાણુંમાં તાર કે

ટાંકણી ઘાલીને તેના છેડા વાળો, અને મળ્નગરા જેવું બનાવો. પછી આ બે કામડીઓથી બનેલો કંપાસ લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાતા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ બેસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ



તરફનો એટલે છુટા છેડા ઘડિયાળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મળ્નગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી બેંડી દીધા છે ત્યાં) ખુણો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો, અને “આ બે કામડીઓ એક બીજીને મળે છે ત્યાં આગળ જે ખુણો બન્યો છે તેને કાણુ કે ખુણો કહે છે,” એમ કહો. કાણુ એટલે ખુણો. અથવા ખુણા બે લીટી* કે બે બાજુઓ મળવાથી જ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના ખુણા બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના ખુણા, બીનો એક બીજીને જ્યાં મળે છે તે ખુણા.....વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો ખુણો બનાવો. પહેલાં

* આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ઘણેખરે ડેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

કરતાં હવે ખુણા મોટા થયો છે કે ? પહેલાં કામડીના છેડા વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો ? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણા કેટલાગણો મોટો છે ? “અમણા.” કામડીના છેડા જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણા મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણા કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણા+ તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. “મોટો છે” એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણા વધારો, અને આ ખુણા જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણા નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણા કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા એ પૈકી મોટો કયો એમ પૂછો. બંને સરખા છે એમ કહે, તો “એટલા મોટા ખુણાને કાટખુણો કહે છે” એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીના છેડા આગળ ખસેડો, અને થએલો ખુણા કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડા આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો ખુણા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીના છેડા ગ અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણા કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીના છેડા જ રથજે આવતા સુધીમાં જો એક કાટખુણા થાય છે, તો છેડા તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણા થશે ?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજા કામડીના છેડાને ફરવું પડે છે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી

+ ન્યૂનતાપૂરક ખુણા એ શબ્દનો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ. પણ તે ખુણા હાથે દેખાડવો. ઉપલો શબ્દ કેવળ શિક્ષકો માટે ચોજેલો છે.

અર્થો કાટખુણો થશે? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે? ...વગેરે.

સૂચના—હવે પછીના ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, પરિધ, ત્રિજ્યા, કૌંસ, જ્યા, વગેરે સંજ્ઞાઓની માહિતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું બિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને વર્તુળ કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો પરિધ કહે છે.

પરિધના કોઈ પણ ભાગને કૌંસ કહે છે.

વર્તુળના જે બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કહે છે.

મધ્યબિંદુથી પરિધ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને ત્રિજ્યા કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્થો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના કરતાં મોટો છે કે? પહેલાંનો ખુણો કેવડો છે? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે? “એક અષ્ટમાંશ.” આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણા મોટો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? “છોડો આગળ ખસેડવો જોઈએ.” ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણા મોટો થશે કે ? “ના.”

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણી બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે ? “ના.” આ ખુણો નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? ખુણો નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. “ફરતી કામડીનો છોડો પાછળ ખસેડવો જોઈએ.”

પરિભાષામાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણો મોટો છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણો મોટો છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમનાં શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જેટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિભાજક, ઉપર કહેલા (૨૧મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળના કેટલામો ભાગ દર્શાવાય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે ? “ના.”

એકથી બીજો જરા મોટો હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટો ખુણો કયો ? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણો મોટો એમ કદાચ છોકરા કહે, તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટો ખુણો કયો તે છોકરાઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે ? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે ? “ના.”

અલબત્ત ખુણો બનાવવા માટે લઘુકોણ કે છેડો વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડ્યો, તો તેવડોજ બીજો હાર્ફ ખુણો કરવા માટે ફક્તો ફ છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે ? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે ?

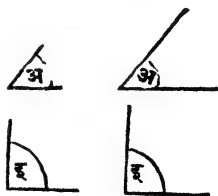
“ જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફેરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે.”

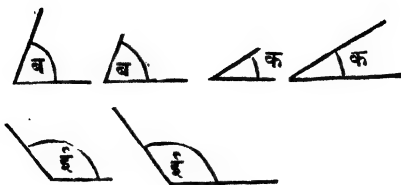
ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીત:—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂક્યો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં

તેમના ઓછાવત્તા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાજુઓની વચ્ચે જે જગ્યા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો બીલકુલ સંબંધ નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું.





દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પડેલી ધડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ધડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને પછી બીજી ધડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચેવચ્ચ બનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડો. નિશાળમાંની વસ્તુઓના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મોટા છે, એ પૂછો.

કાગળનો વર્તુળાકાર કકડો લઈને ઉપસો પ્રયોગ કરો, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયોગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છોકરાઓને મોઢેથી કઢાવો.

કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર બીજી લીટી પડી હોય ત્યારે તે (બીજી) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તે તેમાંથી દરેક ખુણાને કાટખુણો કહે છે.

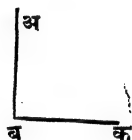
અથવા, ખુણાની બાજુઓના છેડાઓની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હોય છે (ખુણાની બાજુઓના બે છેડા

મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશ ભાગમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણો થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનો જે ખ્યાલ આપ્યો છે, તે પરથી બધા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લો. તેમનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકો; એટલે સઘળા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

એક લીટી બીજીની સાથે કાટખુણો કરતી હોય, તો તે બેમાંની દરેક, બીજી પર લંબ છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અબ, બક પર લંબ છે, અને બક, અબ પર લંબ છે.



કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીત:-

પ્રયોગ—કાગળનો ગમે તેટલા કદનો કકડો લો. તેની ગમે તેમ ઘડી વાળો. આ ઘડીની ધારના ભાગ એક બીજા પર બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુઓ. પહેલી ઘડીની સાથે બીજી ઘડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે? “કાટખુણો.” આ પરથી કાગળ વાળીને કોઈ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે તમે કઈ રીત શીખ્યા? “.....”

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો? “આપેલા બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપેલી લીટીના ભાગ એક બીજા પર પડી રહે.”

બીજી રીત:-અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે. અબ ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં ક બિંદુ અબની બીજી બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે કમાં વિભાજકની અણી ખોસીને, ક બિંદુ કરો; અને કકડ સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લેા, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે ? “ચાર.”

સૂચના—ઘડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ઘડિઆળના બંને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટો ફેરવ્યો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

૨. ઘડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટો હલટો ફેરવીને ૧૨ પર આવ્યો હોય, તો તે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાથી નાનો થશે કે મોટો ?

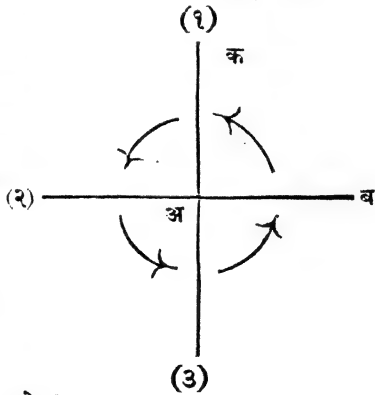
૩. એક કાંટો ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેના ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં અક સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે બે અબ, અક વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને અકનો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે બે અબ, અક વચ્ચે બે કાટખુણા થાય, તો

અક (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે અબ, અક વચ્ચે જે ખુણો થાય તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય ? અક

સળી (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણુની દિશામાં જઈ આખરે અબ પર પડે, તો અક સળી જે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર થયો ?



પહેલાં કલા પ્રમાણે કાગળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. જે બિંદુમાં બંને સળો એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે ?

ઉપલા બે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે ? “તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે.”

એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા ?

વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને સાંકડો ખુણો કહે છે.

કાટખુણાથી મોટા ખુણાને પહોળો ખુણો કહે છે.

જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એક બીજાના કોટિખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં ઢઅબ અને બઅક એક બીજાના કોટિખુણા છે.

ડ

અ

બ

ક

બ

જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં કઅબ ક

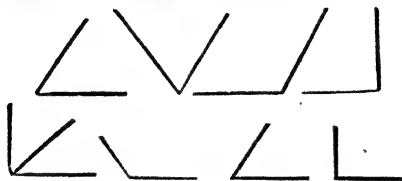
અ

ક

અને બઅક એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા છે.

ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહો.



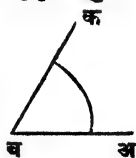
નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કાટખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહો.



ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જે બે લીટીઓ મળીને ખુણો થાય છે, તેમને તે ખુણાના ભુજ કે બાજુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં વક, વઅ તે ખુણાના ભુજ છે.

ખુણાના ભુજ એક બિંબને જે બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું શિરોબિંદુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં વ શિરોબિંદુ છે.

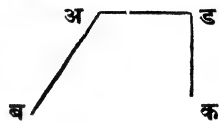


ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરોબિંદુની પાસેના અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનો રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને વઅક કે કઅવ ખુણો કહે છે.



કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ થઈને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના જે ખુણા ક્રમે આવે તે ક્રમે તેના ખુણા પાસેના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરાએલી આકૃતિઓનાં નામ ઘણી રીતે આપી શકાય છે.

દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ અબકઢ, ષકઢઅ, કઢઅબ ઢઅબક, આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ દઈને તે બેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.



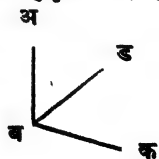
આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ અઢકબ, ઢકબઅ, કબઅઢ, બઅઢક, આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

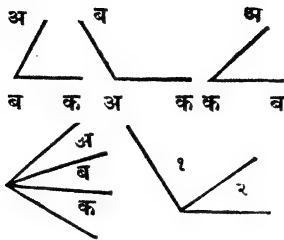
કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અ ખુણો એટલે યરલ ખુણો, અને બ ખુણો એટલે લરબ ખુણો.



‘ખુણો’ એ શબ્દને બદલે \angle આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે \angle અબક એટલે અબક ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો.....વગેરે.

પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે ખુણા એક બીજાને આડકેલા હોય ત્યારે તેમને પાસપાસેના કે પાસેના ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં અબઢ અને ઢબક, એ પાસપાસેના ખુણા છે. અબક ખુણાને અબઢ અને ઢબકનો સરવાળો કહે છે.





ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવો. તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત:-

એક ખુણાનો છાપો* ટિશુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી, કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને† તે કાપી

* છાપો કે છાપ - આકૃતિ પર ટિશુપેપર રાખીને કરેલી નકલને છાપો કે છાપ કહે છે.

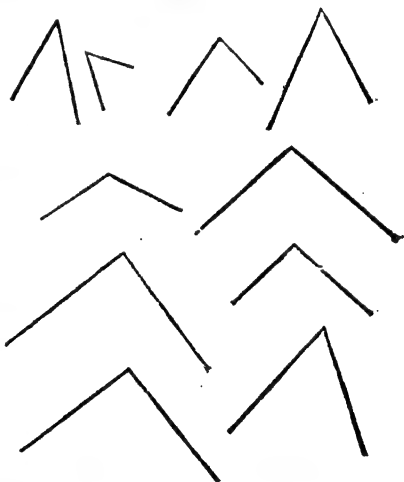
† આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીત:- જો અવક ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય તો તે ખુણા નીચે બીજા કાગળ રાખવો; અને ખુણાનાં અ, વ, ક, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણું પડે તેમને અનુક્રમે અ, વ, ક, નામ આપીને અવ, વક સાંધવાં. અવક ખુણો અવક ખુણા બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

કાણુમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીત:-આપેલો ખુણો અવક, વક લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. વ મધ્યબિંદુ ધારીને વઅ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો આ વર્તુળના ફક્ત એક ભાગમાં થઈને વક ફરી છે માટે અવક જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા વર્તુળના તેટલા ભાગમાં થઈને ખુણાનો બુજ ફેરવો એટલે



કાઢવો. પછી તે ખુણા બીજા ખુણા પર મૂકીને કયો ખુણો મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકતી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપલો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું. પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક જોડામાંના કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં આપેલા ખુણામાંથી કયો મોટો છે તે અંટકળથી નક્કી કરો, અને પછી ઉપર આપેલી રીતે સરખામણી કરીને તમારો જવાબ ખરો છે કે નહિ તે જુઓ.)



નાની મોટી બાજુ-વાળા ચારપાંચ કાટ-ખુણા હાથે દોરો; તેમજ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.

બસ. તેટલા માટે થમ નેટલી બીજા થમ લીટી દોરો. થ મધ્યબિંદુ ધારીને થમ ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ દોરો. બક ઠોસનું અંતર વિશાળક-



થી માપો, અને તે વિશાળક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી

ખુણાના વિભાગ અને ખુણા માપવાની રીત.

જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય એવો કાગળનો કકડો લઈને કાટખુણાનો એક ભુજ બીજા પર પડે એવી રીતે તેને વાળો. કાટખુણાના કેટલા ભાગ પડ્યા ? “એ.” જે ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા ? “સરખા.” એમાંથી દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે ? “અર્ધો.” આ ખુણાને ફરીથી વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે ? “એક ચતુર્થાંશ.”

જેમ કુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટખુણાના ૯૦ સરખા ભાગ કેલ્પીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કાણુમાપક પરના કાટખુણાના ભાગ દેખાડવા.)

ખુણાનું નાનામોટાપણું ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિઘના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી બીજા બધા ખુણા માપવાનો રિવાજ છે. ખુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ

કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ અર્ધ છે. અર્ધ સાંધો. અર્ધ ખુણો આપેલા ખુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

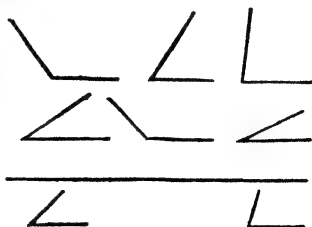
નીચે આપેલા ખુણા જેવડા ખુણા દોરો.

પાસે આપેલી ક્ષીટી જેવડી

ક્ષીટી દોરીને તેના બે છંડા

આગળ, આપેલા બે ખુણા જેવડા

ખુણા કરો.



કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

[‘અંશ’ એ શબ્દને કેકાણે ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકે:—૧૦° એટલે દસ અંશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તે અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા ? પા કાટખુણામાં કેટલા ? $\frac{1}{3}$ કાટખુણામાં કેટલા ?

૨. ઘડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૩. ઘડિઆળમાં બરાબર બે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૪. ઘડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯.....વગેરે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહો:—પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઈશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઈશાન—પૂર્વ,* વાયવ્ય—ઉત્તર અને પૂર્વ.....વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સૂચના—જે ખુણા માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ

* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

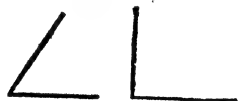
પર કોણુમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણુમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે થઈ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણુમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણુમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણુમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણુમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. તેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુંચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણુમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશા ટેવ રાખવી એ સાફ છે.

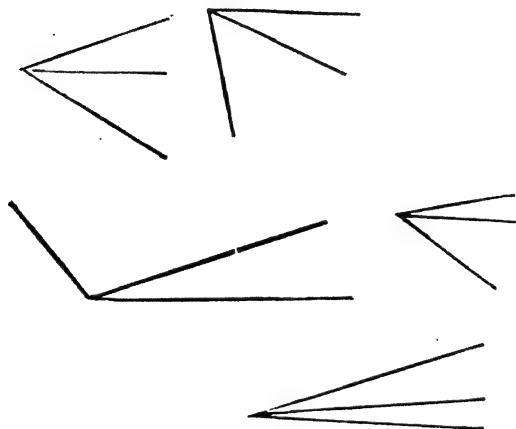
ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં અટકળથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણુમાપક પરનાં આંકડા ખોટી બાજુએથી ગણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જણાઈ આવશે.

પ્રશ્ન.

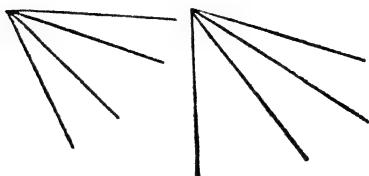
૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.

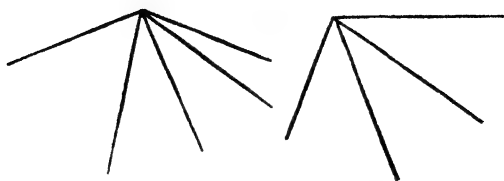


નીચે આપેલા પાસપાસેના ખુણામાંનો દરેક ખુણો માપો; અને તે બે ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આખો ખુણો માપો, અને તે પરથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.



૪. ઉપર પ્રમાણેજ નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશ સુધી તફાવત પડે તો તે દરમુજર કરવામાં હરકત નથી.)





૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આવેના ભાગ પર કેટલાંક એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર-પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું માલમ પડ્યું ? “ તે સરખા છે.”

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જરૂરી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણો દુભાગવાની રીત (કાગળની ધડી વાળીને) :—આપેલા **અબક** જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. અબ,બક પર

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાંકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે જે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૈંસ, પરિધ, જ્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહિતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.

બીજી રીત:—આપેલા અઘક ખુણાનું **બ** મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને અઘ, **બ**કને અનુક્રમે **ડ** તથા **ઈ**માં છેદે એવો કૈંસ દોરો. **ડ**, **ઈ** મધ્યબિંદુ અને **ડઈ** જેટલી ત્રિજ્યા લઈને **ક**માં એક બીજાને છેદે એવા કૈંસ દોરો. **કઘ** સાંધો. **કઘ** આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

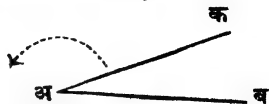
કૈંસ દુભાગવાની રીત:—અઘ આપેલો કૈંસ છે. અઘનો જાપો લો. **અ**, **બ** પર પડે એવી રીતે ઘડી વાળો. ઘડીથી અઘના જે જે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

બીજી રીત:—એક અઘ કૈંસ લો. **અ** મધ્યબિંદુ અને અઘના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક કૈંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **બ** મધ્યબિંદુ લઈને આ કૈંસને **ક** અને **ડ**માં છેદે એવો બીજો કૈંસ દોરો. **કઘ** સાંધો. અઘ કૈંસને **કઘ** દુભાગે છે.

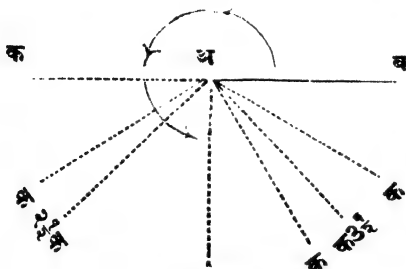
૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક અઘ કૈંસ લો. અઘ કૈંસને **ક** બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ મને **અ**, **બ**, **ક**ની સાથે સાંધો. અમઘ અને **બમઘ** ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજો કૈંસ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના કૈંસોની વચ્ચે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

બહિર્વકકોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની અબ સળી જ્યારે બાણની દિશામાં (ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં) ફરતી ફરતી '૨'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવે છે, ત્યારે તે અબની



(૨) — ક અ બ



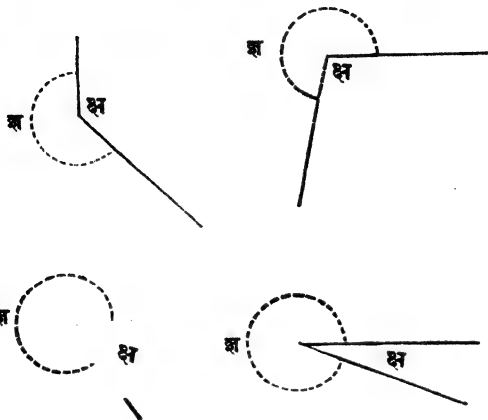
(૩) ક

સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે જો તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી '૩'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવશે, તો તે અબ સાથે જો ખુણો કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટો થશે.

આ પ્રમાણે અક સળી '૨'થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી અબ ઉપર જઈ પડેલાં સુધીમાં અબ સાથે જો ખુણો કરશે, તે બે કાટખુણાથી મોટા અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક ખુણો કે બહિર્વકકોણ કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી જો ખુણો થાય છે, તેને બહિર્વકકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નાંચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા અહિર્વકકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો અહિર્વક દેખાતા નથી એ ઉધાતું છે.



[ઉપલા ખુણામાંથી કોઈ પણ ખુણો જ્ઞાની બાબુથી જોયો હોય, તો તે એ કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે જ્ઞાની બાબુથી જોયો હોય તો એ કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. જ્ઞાની બાબુ પરનો ખુણો અંતર્વક ખુણો કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક ખુણો એટલે એ કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

મશ.

૧. ધડિઆળમાં ૯ વાંગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો અહિર્વકકોણ થાય છે ?
૨. એ કાંટાની વચ્ચેનો અહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે અહિર્વક ખુણો કેટલો મોટો છે ?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી બમણો, ઝગણો, પગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

સાપેક્ષ દિશા.

એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીત:—ધારો કે **બ** સ્થળ **અ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ સીધી કાઢવું છે. **બ** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી લગભગ કઈ દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો અમાં થઈને જાય એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **બ**થી **અ** સુધી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો

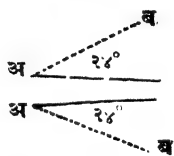
પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો

થાય છે તે ખુણો માપવો. ધારો કે આ

ખુણો ૨૪ અંશનો છે. હવે જો અબ લીટી

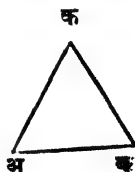
પૂર્વ બતાવનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો

બની દિશા 'પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું; અને અબ લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો બની દિશા 'પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું.



પ્રશ્ન.

૧. અબક અને બઅક ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો અબ લીટી પૂર્વપશ્ચિમ હોય, તો **ક**, **અ**ની કઈ દિશામાં છે? **બ**ની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ **અ** સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને

બ સ્થળે પહોંચે છે; તો બ, અની કઈ દિશામાં છે? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઇંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈ પણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા અબકઢ લંબચોરસમાં ક, અની કઈ દિશામાં છે? અબ બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ-૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. બની પશ્ચિમે અ ૨.૫ માઇલ છે અને અની દક્ષિણમાં ક ૪.૫ માઇલ છે; તો બથી ક કેટલું આધું છે અને બની કઈ દિશામાં છે?

૫. એક માણસ અ સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઈશાન તરફ ૮ માઇલ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો અથી બ કેટલું આધું છે, અને અની કઈ દિશામાં છે?

૬. અ, બની વાયવ્યમાં ૧૭.૫ માઇલ છે; બ, કની ઈશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો ક, અથી કેટલું આધું છે, અને અની કઈ દિશામાં છે?

૭. બ અને ક એ સ્થળો અથી બરાબર ૫ માઇલ પર છે; અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં 35° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં 15° છે; તો બ, કની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે?

૮. બ અને ક સ્થળોની વચ્ચે ૩.૫ માઇલનું અંતર છે, અને બ, અની બરાબર ઉત્તરમાં છે. ક, બની બરાબર પૂર્વમાં અને અની બરાબર ઈશાનમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું?

૯. અ અને બ બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અંતર છે. બ, અની બરાબર ઉત્તરે છે. એક વંહાણુ બથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા અની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૭ અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વંહાણુ ૫ મિનિટમાં કેટલું અંતર ચાલ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે.મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫°નો ખુણો થતા સુધી તે આઘી કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દાટેલા ખુંટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુંટાથી ૩૫ હાથ આઘી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે ?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દોરવાની રીત:—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની અણીથી કે ટાંકણીથી આ બિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરો:—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો અઘ્ઘ ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો કઘઘ ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો અઘઘ ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો બૂલ ક્યાં છે તે ખોળી કાઢો.

અઘ્ઘ અને કઘઘ એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લખ્તને ઉપલો પ્રયોગ કરો:—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

અવક, કવઢ, ઢવઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના હો. અવઈ ખુણો માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે જૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

અવક, કવઢ, ઢવઈ, એ ખુણા નીચેના અંશના લઈને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬, ૨૦, ૩૪; (૩) ૫, ૧૮, ૧૦૦.

અવક ખુણો ૧૩૦°નો લઈને તેમાંથી ૪૦°, ૩૦°, ૨૫°ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણો ૩૫°નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો જૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

ખીજા ખુણા લઈને ઉપલો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જરૂરી રાખો:—૪૫°, ૨૨.૫°, ૩૦°, ૨૦°, ૬૦°, ૧૦°, ૭૦°, ૮૦°, ૧૨૦°, ૧૩૫°.

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ=ખુણો.

જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ). આ આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હૈ



ત્રણ સીધી લીટીઓથી બંધાયેલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ* કહે છે.

નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

અવ=૧૦૩°, ∠અવક=૩૦°, ∠અવક=૬૦°.

„=૧°, „ ૫૦°, „ =૫૦°.

„=૧૮°, „ ૬૦°, „ =૩૦°.

.....વગેરે.

* બ્યાખ્યા—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની હૈ બંધાયેલી હોય તે આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

અબક ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની અબ બાજુ
હ સુધી વધારો. કબહ ખુણો
સાંકડો છે કે પહોળો?



અબક કાટખુણો દોરો. તેની અબ બાજુ હ સુધી લંબાવો.
કબહ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો?

ગમે તેવડો એક અબક પહોળો ખુણો કાઢો. તેની અબ બાજુ
હ સુધી વધારો. કબહ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો?

અબક $\frac{1}{2}$ કાટખુણા જેવડો કાઢો. અબને હ સુધી વધારો.
કબહ ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.

(કાણુમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નાના ઉત્તર આપો.)

અબહ લીટી પર ચક્ર લીટી ઉભી છે—

અને અબક ખુણો ૫૩ અંશનો છે; તો કબહ કેવડો દશે?

” ” ૭૮ ” ” ” ”

” ” ૧૧૦ ” ” ” ”

” ” ૧૩૭ ” ” ” ”

ઉપલા પ્રશ્નો પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં અબક ખુણો કાટખુણાથી કેટલે
અંશે ઓછો કે વત્તો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે કબહ ખુણો
કાટખુણાથી કેટલે અંશે વત્તો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી
અબક અને કબહ ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે?
“તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.”

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા
પાસપાસેના ખુણાઓના સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે?

“એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની
એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમના
સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.”

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

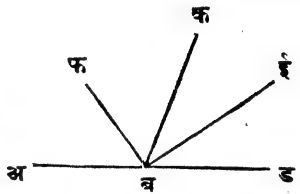
અબડ એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—

અબક લીટી ૬૫°નો ખુણો કરે છે, તો કબડ ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

” ૧૨૦° ” ” ”

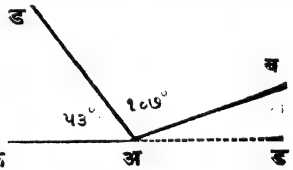
” ૧૨૫° ” ” ”

અબડ લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી અબક લીટી દોરો. કાગળ વાળીને અબક ખુણાને દુભાગો. તેજ પ્રમાણે કબડ ખુણાને દુભાગો. ખુણા દુભાગનારા સળ અબક અને અબક લીટીઓ વડે દર્શાવો. અબક ખુણો માપો. તે કેવડો



છે? આ ઉપરથી અબક અને કબડ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર જણાઈ આવે છે? “ બે કાટખુણા બરાબર. ”

અબ લીટી લો, તેની એક બાજુએ અબક ૫૩ અંશનો ખુણો કરો. બીજી બાજુએ અબડ ૧૦૭ અંશનો ખુણો કરો. કબડ ખુણો કેટલા અંશનો થાય છે? તે બે કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે? કબડ સીધી



લીટી છે કે? કબડ સીધી લીટી દોરો. તે સીધી લીટી થવા માટે અબક અને અબડ બે ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ?

ઉપલા પ્રશ્નોમાં અબક અને અબડ અનુક્રમે ૫૦ અને ૧૧૦, ૧૦૫ અને ૭૫, ૫૧ અને ૧૨૯, ૧૧૦ અને ૯૦, ૪૯ અને ૧૪૧, ૩૦ અને ૧૭૦ લો અને ઉપરના જેવાજ પ્રયોગ કરી જુઓ.

આ ઉપરથી કબહ લીટી સીધી હોવા માટે જાણ અને જાણ પ્રમાણ વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટપ્રમાણ બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે? “તેમનો સરવાળો બે કાટપ્રમાણ બરાબર હોવો જોઈએ.”

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 11° અને 103° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 112° અને 72° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 106° અને 71° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 71° અને 110° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 40° અને 130° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

અવક અને કબહ પ્રમાણ અનુક્રમે 134° અને 42° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે?

ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“જો બે પાસપાસેના પ્રમાણનો સરવાળો બે કાટપ્રમાણ બરાબર હોય, તો તેમના બહારના બુજે એક સીધી લીટીમાં હોય છે.”

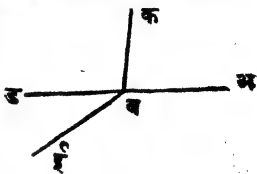
પાસેની આકૃતિમાં અવક અને કબહ પ્રમાણનો સરવાળો કેટલા કાટપ્રમાણ બરાબર છે? આ

ઉપરથી અવક, કબહ, ડબ્બ, અને

ફાંચ પ્રમાણનો સરવાળો કેટલા

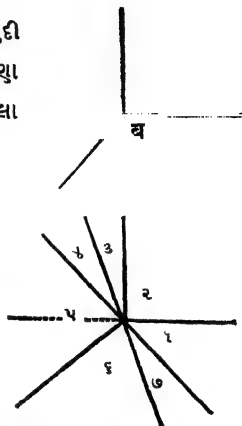
કાટપ્રમાણ બરાબર થશે એ તમે કહી

શકશો?



જા બિંદુમાંથી ત્રણ લીટીઓ જુદી જુદી દિશામાં દોરો. તેથી બનતા ત્રણે ખુણા માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

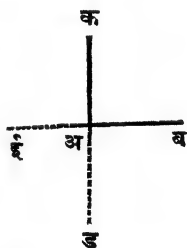
પાસેની આકૃતિમાં સાત ખુણા એક બિંદુની જોડે આવેલા દર્શાવ્યા છે. એમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે, એ ખુણા પ્રત્યક્ષ માધ્યા વગર કહો.



ઉપલી આકૃતિમાંના છ ખુણાનો સરવાળો ૩૬૦ કાટખુણા હોય, તો બાકી રહેલો ખુણો કેટલો મોટો હોવો જોઈએ ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં છ ખુણાનો સરવાળો ૨૩૦, ૩૬૦, ૨૩૦ કાટખુણા ધારીને ઉત્તર કાઢો.

ઘડક કાટખુણો છે. ઘડને ઈ સુધી વધારેલી છે, અને કઝને ડ સુધી વધારેલી છે; તો કઝઈ, ઈઝડ, ડઝઘ, એ પૈકી દરેક ખુણો કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

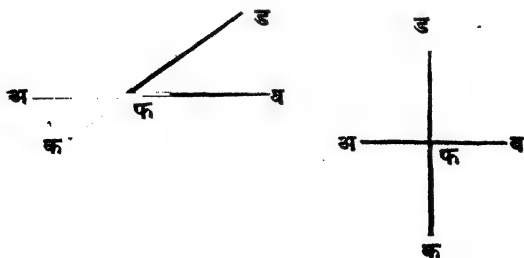


એક ઘડક લીટી લો. તે પર ગમે તે ઘડ લીટી દોરો. કાગળની ધડી વાળીને ઘડક ખુણાને દુભાગો, અને તેજ રીતે કઝક ખુણાને દુભાગો. કાગળ પરના બે સળની વચ્ચેના ખુણો કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માધ્યા વગર કહો. ઉત્તરનું કારણ આપો.

એક બીજને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના યુગ્મ.

ગમે તેટલી લાંબી બે કામડી કે સળી લેા, અને તે એકજ દિશામાં ખડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના* મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી બે કામડી પૈકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજા છેડાની પણ $\frac{1}{2}$ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજાની પણ $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, તેમજ પહેલાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજાની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપરો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થવી, એ કામડીના જે બે ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઈના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે ? “ના.”

ઉપરો પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો:—



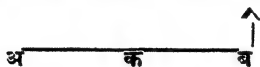
* ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં રશ્મા પાના પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

અવ અને કઢ કામડીઓને એક બીજી પર રાખીને ફ સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે કઢ કામડીનો ઢ છેડો બે વર્તુળના ૩ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગમાં ઢ છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના ૩ ભાગમાં) થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કોઈ પણ બિંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જે ખુણાઓમાં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક બીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

“જ્યારે કોઈ લીટી પોતાનામાંના કોઈ બિંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરે તે બિંદુથી ગમે તેટલાં બોજાં વર્તાં હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે.”



અવ લીટી ક બિંદુની આસપાસ ફરે છે. બે તેનો કલ્પ ભાગ ૩૬°ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો કલ્પ ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે?

અવ લીટી પર કઢ લીટી (બંનેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. કઢ લીટી અ વ ફ બિંદુની આસપાસ ફરીને અવ સાથે બફઢ ખુણો ૨૦ અંશનો ફરે, તો અફક ખુણો કેટલા અંશનો થાય?

ઉપલા પ્રયોગમાં ઢ છેડો ૪૫, ૬૦, ૭૫, ૧૧૫ અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેવડા ખુણામાં થઈ ને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગમાં અફડ ખુણા કેટલો મોટો થશે? કફબ ખુણા કેવડો? વફડ ખુણા ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

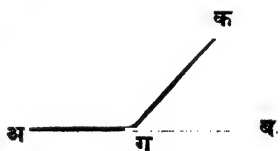
વફડ ખુણા ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં અફડ, અને કફબ, તથા વફડ અને કફઅ, એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે?

એક અફબ લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે કફડ લીટી દોરો. વફડ ખુણા કાપી કાઢો, અને તે કફઅ પર મૂકો. તેમજ અફડ ખુણા કાપી કાઢી તેને કફબ પર મૂકો. તમને શું જણાય છે?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે? “બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની ખરાબર હોય છે.”

પાસેની આકૃતિમાં વગડ ખુણા ૧૩૦° છે; તો અગડ ખુણા વગક ખુણા ખરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માધ્યા સિવાય સિદ્ધ કરો.



ડ

સમાંતર લીટીઓ.

કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની જોડો પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક જોડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓછું થતું જાય છે કે વધતું થતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે.” “કેટલીકની વચ્ચેનું

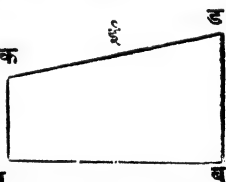
અંતર ઓછું થતું જાય છે”, અને “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હતું તેટલુંજ રહે છે”, એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાજુએ અંતર ઓછું છે તે બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “હા.” સામી બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે, જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? “હા.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાજુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? “ના.” ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો? “ના.” આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

સમાંતર (સમ+અંતર)=જેમની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોય છે તે.

જેમની બે બાજુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

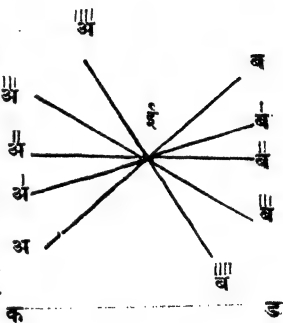
સમાંતર લીટીઓ વિષેની કલ્પનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

એક સીધી અથવા સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી કેટલેક અંતરે બીજી એક સીધી કડ સળી \vec{K} સ્થળે ખોસેલી ટાંકણીથી પાટીઆ \vec{D} સાથે જડી દીધી છે. આ સળીને પહેલાં ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો. આ સ્થિતિમાં \vec{K} ને \vec{D} છેડાનું અથવા છેડાઓથી અંતર માપો. કડનો જે છેડો અથવા \vec{K} વધારે આધો હોય, તે છેડાને અથવા પાસે લઈ જાઓ, અને તે છેડો અથવા પાસે લઈ જતી વખતે, બીજા છેડાનું અથવા જે અંતર હોય તેમાં શો ફરકાર થાય છે, તે જુઓ. “પહેલાં જે છેડો આધો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ



ખીન છેડાનું અંતર વધતું જાય છે.” એ પ્રમાણે ફેરફાર થતાં થતાં કોઈ પણ વખતે અવથી ક અને ડ છેડાનું અંતર સરખું થાય છે કે ? “થાય છે.” એવી સ્થિતિમાં બે લીટીઓ હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે બધે ઠેકાણે સરખું અંતર હોય છે માટે એવી સ્થિતિમાં તેમને સમાંતર કહે છે.

પાસેની આકૃતિમાં અબ લીટી ફરે છે ત્યારે તે જુદી જુદી સ્થિતિમાં આવે છે, તે સ્થિતિમાં અબ, અબ, અબ, એ લીટીઓ દર્શાવે છે. અબ લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે એક અમર્યાદ કડ લીટીને છેદે. અબ એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે કડ-



ને છેદે... અબ લીટી એવી છે કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે કડને છેદે નહિ, પરંતુ તેને જમણી બાજુએ વધારી હોય, તો કડને છેદે. અબ લીટી એવી છે કે તે...વગેરે.

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાય છે, કે અબ લીટી ફરતી આસપાસ ફરવામાં અમુક હદમાં હોય ત્યાંસુધીજ, ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો કડને છેદે છે. તે હદની બહાર જાય ત્યારે, તે લીટીને જમણી તરફ વધારી હોય તો કડને છેદે છે. આ બે હદની વચ્ચે એવી એક સ્થિતિ હોવી જોઈએ, કે તે સ્થિતિમાં તે લીટીને ગમે તે દિશામાં વધારી હોય તોપણ તે કડને મળે નહિ. એવી સ્થિતિમાં બે લીટીઓ હોય તો તેમને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

કેટલાક પુણાનાં નામ.

અબ, કડ લીટીઓને ર્ફ
લીટી મ અને હ બિંદુમાં છે
છે. ર્ફ લીટી વડે અબ, કડ
લીટીઓની સાથે જે પુણા
થાય છે, તેમને નીચે પ્રમાણે
નામ આપ્યાં છે:—



∠ કહમ અને ∠ હમબને વ્યુત્ક્રમ (વિરુદ્ધ બાજુએ હોય
એવા) પુણા કહે છે.

∠ ડહમ અને ∠ હમઅને વ્યુત્ક્રમ પુણા કહે છે.

∠ ર્ફહક, ∠ ર્ફહડ, ∠ ફમઅ, અને ∠ ફમબને બહારના
પુણા કહે છે (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની બાજુના
પુણા છે.)

∠ ર્ફહડ, ∠ હમબને સંગત પુણા કહે છે.

∠ ર્ફહક, ∠ હમઅને " " "

∠ કહમ, ∠ હમઅ, ∠ ડહમ, ∠ હમબને અંદરના પુણા
કહે છે; કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની બાજુના પુણા
છે. એમાંથી ∠ કહમ અને ∠ હમઅ એ ર્ફની એકજ બાજુએ
છે, તેથી તેમને એકજ બાજુ તરફના અંદરના પુણા કહે છે.
તેમજ ∠ ડહમ અને ∠ હમબ એ ર્ફની એકજ બાજુએ છે;
તેથી તેમને પણ એક બાજુ તરફના અંદરના પુણા કહે છે.

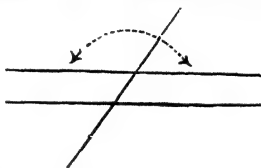
તમારી એક્સસાઈઝ બુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી
જુદી ચાર જોડો લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી
લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ પુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે
(વ્યુત્ક્રમ પુણાની જોડમાંના એક પુણાને બીજા સાથે) સરખાવો.
તેમને શું જણાય છે ?

વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકો. શું દેખાય છે ? “તે સરખા છે.”

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે ? “ના.”

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ?

તમારી એક્સસર્સિઝ બુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી બાજુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી



કાઢો. આ ભાગ અર્ધા વર્તુલ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજા બાજુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિષે તમે શું શીખ્યા ?

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે ? “સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી.”

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? બીજા બાજુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે ? “બે કાટખુણા.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાજુ તરફ ઓછું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાજુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે? બે કાટખુણાથી ઓછો કે વધુ? “ઓછો.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય છે કે વધારે? “વધારે.”

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે?

“જો એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છેદે, તો—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;

(૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.”

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—નીચેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને પ્રકરણ પુરું થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ ગમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજાને મળતી નથી, તે સમાંતર લીટીઓ કહેવાય છે.

‘એકજ સપાટીમાં હોઈ’ આ શબ્દો શા માટે વાપર્યા છે? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે

* ‘સપાટી’ શબ્દનો અર્થ આગળ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણુકિતર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોથી દર્શાવાતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીલકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે ? “ના.” આ ઉપરથી ‘એકજ સપાટીમાં’ એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે ?

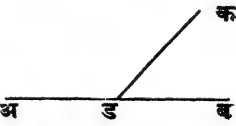
જે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો જે 90° નો હોય તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 10° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 95° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 180° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે ? ધારો કે અબ લીટીને સમાંતર લીટી ક બિંદુ-માંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશે ? અ  ક કમાંથી અબ લીટીને ગમે તે એક ડ બિંદુમાં મળનારી એક કડ લીટી દોરો. કડબ ખુણો માપો. કોઈ એક લીટી ક પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી અબને સમાંતર થાય ? “ \angle કબડ જેટલો.” કડની કઈ બાજુએ ? “ \angle કડબથી વિરુદ્ધ બાજુએ.”

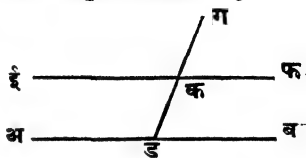
ઉપલા પ્રશ્નમાં કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો કની જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો

હોય ? તે ખુણા દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય ? અથવા લીટી અને ક ખિંડ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક અથવા લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક ક ખિંડ લો.

અથવા ગમે તે ડ ખિંડ લો.

કડ સાધો. પછી નીચેના ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી આકૃતિ દોરીને કરો:—



(૧) \angle કડવ જેવડો \angle ડકઈ લઈને ઈકફ લીટી દોરો.

(૨) \angle કડવના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો \angle ડકફ દોરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૩) ઢકને ક તરફ ગ સુધી વધારો. \angle કડવ બરાબર \angle ગકફ કરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર છે, અને ઈફ, અથવા સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—અથવા લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કર્ણ બરાબર પડે એવી રીતે તે

ત્રિકોણમાપ મૂકવું.

ત્રિકોણમાપની બીજી

બાજુને (એટલે

કાટખુણા કરનારી અ

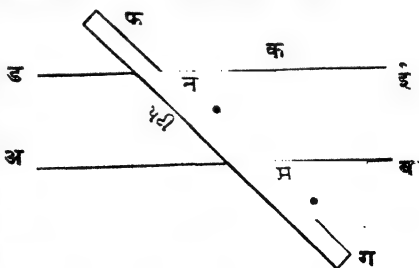
થે બાજુમાંથી એક

બાજુને) આકૃતિમાં

બતાવ્યા પ્રમાણે

પટ્ટી લગાડવી. પછી પટ્ટીને દાબી રાખીને પટ્ટીની કોરે કોરે

ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું, ક ખિંડ પર ત્રિકોણમાપનો



કર્ણુ આવ્યો, કે કર્ણુની કોરે કોરે ક બિંદુમાં થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

ધારો કે એવી રીતે ઢકૈ લીટી ક બિંદુમાં થઈને જાય એમ અવને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. અબ, ઢકૈ, એ લીટીઓને છેદનારી કગ લીટીથી થનારા ન અને મ સંગત ખુણા સરખા છે; ઢકૈ લીટી અવને સમાંતર છે.

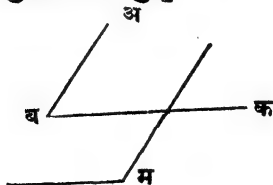
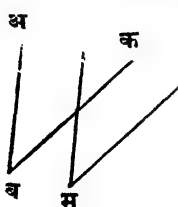
એક અબ લીટી લો. અવને સમાંતર કઢ લીટી દોરો. કઢને સમાંતર ઈફ લીટી દોરો. ઈફ, અવને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી જો એ લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.”

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીત:—

જો દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજ+મૂકીને તેની લગોલગ લીટી દોરવી (એક આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી પટ્ટી કે બીજું ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટ્ટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કોરે કોરે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમે ત્યાં ચાર પાંચ બિંદુ લો, અને તે બિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજોવાળા ખુણા.



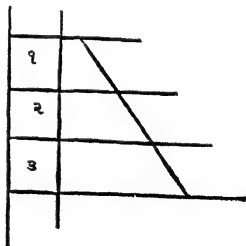
+ કાટખુણો કરનારી બે લીટીઓને ભુજ કહે છે.

એક અબક ખુણા લો. ગમે તે એક મ ખિંદુ લો. મમાંથી વજ્ર, વક્રને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા માપો. તેને \angle અબક સાથે સરખાવો. તે \angle અબક જેવડો ન હોય તો તેને \angle અબકમાં ઉમેરો અને એનો સરવાળો કેટલો થાય છે તે જુઓ.

આ ઉપરથી કોઈ ખુણા અને તેના ભુજોને સમાંતર હોય એવી લીટીઓ વચ્ચેના ખુણા એ એની વચ્ચેના સંબંધ વિષે શા નિયમ જણાઈ આવે છે ? “આ ખુણા સરખા હોય છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે. (ખુણા ક્યારે સરખા હોય છે અને ક્યારે ન્યૂનતાપૂરક હોય છે એનો ખુલાસો આગળ ૬૬ પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.

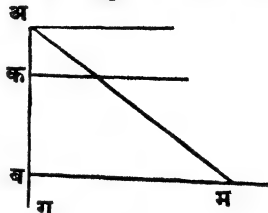
સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર ખિંદુઓ લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ બધી સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર લીટીઓને લીધે, જે એ કે ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે ? “ગાળાઓ સરખા છે.” એવીજ રીતે બીજી લીટીના ગાળાઓ સરખાવીને શું જણાય છે તે જુઓ. “ગાળાઓ સરખા છે.” ત્રીજી અને ચોથી લીટી માટે એવાજ પ્રયોગ કરો. (૫૦.)



આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય છે.”

અગ અને અમ લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો.
અગ લીટીમાં અથી થોડે અંતરે અ
ક બિંદુ લો; ત્યાંથી અકથી
ખમણે અંતરે બ બિંદુ લો; અ,
ક, બ, બિંદુમાં થઈને જનારી]
સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે અમના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક
ખીજ સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? ઉપલી આકૃતિમાં
સમાંતર લીટીઓને છેદનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર
લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ
આવે છે?

અગ લીટીમાં કબ અંતર અકથી ત્રણગણું લો, અને ઉપર
પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર
દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી
સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં
ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે? “સમાંતર
લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે.”

એક્સસર્સાઈઝ પુસ્તકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર
મિલિમીટરમાં કાઢો.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે
લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ
છે કે? “હા.” આ ઉપરથી શું સમજાય છે? “બે સમાંતર

લીટી પૈકી એક લીટી પર લંબ હોય એવી લીટી બીજી લીટી પર પણ લંબ હોય છે.”

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની બે અણી વચ્ચે એક કુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક બિંદુ લઈને તેને આ નામ આપવું. આ બિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક બિંદુ કાઢવું. અર્થાત્ આ બિંદુનું અંતર એક કુટ છે? “એક કુટ.” પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (અને અણીઓની વચ્ચેનું

અંતર તેનું તેજ રાખીને) ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું બિંદુ કાઢવું. અર્થાત્ આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? “એક કુટ.” એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાંનું અંતર અર્થાત્ સરખુંજ છે (એટલે એક કુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવવો. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પૂરું કરવું. (વર્તુળના પરિધ પરનું એકાદ બિંદુ બતાવીને) “આનું અર્થાત્ અંતર કેટલું છે?” “એક કુટ.” (પરિધ પરનું બીજું કોઈ બિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અર્થાત્ કેટલું છે? “એક કુટ,” આ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુનું અંતર અર્થાત્ એક કુટ છે, એ વાત પરથી વર્તુળના પરિધ પરનાં બિંદુ અને મધ્યબિંદુ વચ્ચેનાં અંતર વિષે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે? “પરિધ પરનાં સર્વ બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે.” તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક કુટ અંતરે હોય એવું) બિંદુ પરિધની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે? “ના.”

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાજુ પર કુંઈ નિશાની કરીને તે આંકણીની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટી પર ફેરવો અને ફુટપટી પરનું અંતર માપો. પછી તે આંકણીનો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

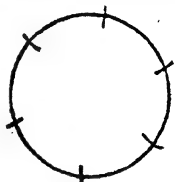
એ ઇંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

૩.૫", ૭" વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? "૩ઠ્ઠી ગણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭ : ૨૨ હોય છે."

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર અ,બ,ક,ડ,ઈ,ફ,ગ,...એ બિંદુઓ ધણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. અ આગળ શરૂ કરીને ફરીથી અ સુધી આવી પહોંચે ત્યાંલગી ટાંકણીઓની આસપાસ દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે? "સવાછગણી છે."

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે અબ અંતર જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો અબ કોંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ઘણી બાજુવાળી આકૃતિની બાજુઓ જો ઘણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિતિ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિઘ પર મૂકીને પરિઘના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થયા? “ છ. ”



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં ખીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય? “ છ. ”

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨.૯" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ.મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

અ સ્થળે રાખેલી તોપના ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૧ માઇલ=૧".)

બે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપના મારો છ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૫ મિ. મી. = ૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જે નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આંધું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ-૧ મિ. મી. = ૧ ફુટ.)

* પરિઘ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

એક ખીજથી ૧.૫" અંતરે અ અને વ બિંદુઓ લેા. અથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવેા. (આ લીટી, ૧.૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવેા. અ ને વ, એ બંને બિંદુથી ૧.૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે ? “ બે. ” તેમને ક ને ડ કહો. તેમને અ, વ સાથે સાંધો. અવ, વક, કઅ અને અવ, વડ, ડઅ લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ?

અ ને વ એ બે બિંદુઓ એક ખીજથી ૧.૭" આધાં છે. અથી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવેા. વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. અથી ૨" અને વથી ૧.૫" આધું કયું બિંદુ છે ? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે ? “ બે. ” તેમને ક ને ડ કહો. અક અને વકની લંબાઈ કેટલી છે ? તેમજ અડ અને વડની લંબાઈ કેટલી છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે ? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું ?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે ? કેટલા ખુણા ?

અ,વ બિંદુઓ એક ખીજથી ૧.૨" અંતરે છે. અથી ૨" અને વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવું ક બિંદુ શોધી કાઢો. અવ,વક,અક, એ બિંદુઓ સાંધો. અવ,વક,કઅની લંબાઈ કેટલી ? અવક એ કઈ આકૃતિ છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની અવ,વક,અક બાજુઓની લંબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે ?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના અવક અને અવડ ત્રિકોણમાં કઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે ?

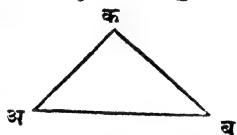
નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

અવ ૧.૪"	વક ૨"	કઅ ૨.૫";
" ૨.૧"	" ૧.૮"	" ૩.૨";

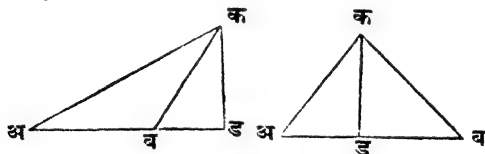
અવ	૪.૧"	વક	૪.૨"	કઅ	૪.૩";
,,	૪૧ મિ. મી.	,,	૪૨ મિ. મી.	,,	૪૩ મિ. મી.
,,	૩૨	,,	૧૮	,,	૨૦
,,	૬૯	,,	૧૧૪	,,	૫૮

(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

ત્રિકોણ ને બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો પાયો કહેવાય છે. અવક ત્રિકોણ અવ બાજુ પર છે એમ ધાર્યું હોય, તો અવ તેનો પાયો થાય; પણ તે વક પર ઉભો છે એમ ધાર્યું હોય તો વક તેનો પાયો થાય.



ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની ઉંચાઈ કહે



છે. પાસેના ત્રિકોણમાં કડ, અવક ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે.

ત્રિકોણની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે ?

- “ (૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
 (૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
 (૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા.”

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણ હોઈ શકે ? એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે ?)

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને વિષમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ, પ્રથમ વિભાજક અને પટ્ટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

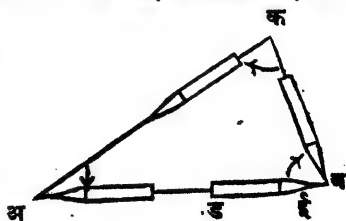
ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક બીજાની લગોલગ મૂકો. તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે? “ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેના પ્રયોગ કરવો.

અચ્ચક એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. હવે એક પેન્સિલ છે, અને તેની ઈ અણી બ તરફ છે. આ પેન્સિલને અચ્ચ બાજુમાં બ સુધી ખસેડો. તે બિંદુ આગળ હ છેડાને અચ્ચક ખુણા જેટલો ફેરવીને ઈડ, ચક પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને



ક તરફ ખસેડો; અને હ છેડો કને અડકે, એટલે હ છેડાને વક્રવ ખુણા જેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને અ તરફ ખસેડો; અને હ છેડો અને અડકે, એટલે હ છેડાને કવચ ખુણા જેટલો ફેરવો. પેન્સિલને અવ લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમને સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની હ અણી કઈ દિશામાં છે ? “ અ તરફ. ” પહેલાં કઈ દિશામાં હતી ? “ અ તરફ. ” આ પરથી હ અણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. અણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી હાઈ પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. “ તે બે કાટખુણામાં થઈને ફરી છે. ” અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

જો ત્રિકોણના બે ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જો ત્રિકોણના બન્ને ખુણા સરખા હોય, અને જોમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ ?:—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણના બે સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જોના સમગ્ર ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

નીચે આપેલા અંશના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે ?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°. (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°, (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જો ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા નહોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેનો ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓનો ત્રિકોણ બનશે કે ?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળો ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બાજુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે ?

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કહ્યું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહો:—

પહોળો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧) કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨) કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩) સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪) પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫) પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬) પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે ? “ એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી ”; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને પહોળાખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાનું જોઈએ ? “ બે. ”

ઉપલા પ્રશ્નમાં \angle બ નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને \angle ચ, \angle ર, \angle વ ખુલા કાઢો:—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

ત્રિકોણના બહારના ખુલા.

એક અબક ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે વક)ને હ સુધી વધારો. અકહ ખુલાને અબક ત્રિકોણનો બહારનો ખુલો કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી હોય, તો છ બહારના ખુલા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુલા થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા બબ્બે ખુલા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ બેડમાંના ગમે તે એક ખુલાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો ખુલો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના ખુલા એટલે કયા ખુલા સમજવા એ વિષે શક ન પડે, એટલા માટે ત્રિકોણના બહારના ખુલા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છે:—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકબે ક્રમે વધારી હોય, તો તે બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુલાઓને તે ત્રિકોણના બહારના ખુલા કહે છે. દાખલા તરીકે, ૭૪મા પાના ઉપરની આકૃતિમાં અકર્દ, વઅફ, અને કવગ, એ અબક ત્રિકોણના બહારના ખુલા છે.

ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુલાનો સરવાળો જ્યારે એ કાટખુલા બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુલાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયો? “ત્રીજો ખુલો.”

પાસેની આકૃતિમાં (\angle વઅક + \angle અકવ)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયો? (\angle અકવ + \angle કવઅ)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયો?

\angle કવઅના ન્યૂનતાપૂરક ખુલા કયા?

\angle વઅકના કયા? \angle અકવના કયા?



ગમે તે એક અકબ ત્રિકોણ દોરો. વક બાબુને ડ સુધી લંબાવો.

∠અકબ+∠અકડ=૨ કાટખુણા, તો

∠અકબનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ?

“∠અકડ.” આગલા પ્રયોગ પરથી

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા

∠અકબના ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે ? “∠કબઅ +

∠વઅક.” આ પરથી ∠કબઅ, ∠વઅક એમનો સરવાળો

અને ∠અકડ, એ બેની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

“ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સરવાળા બરાબર હોય છે.”

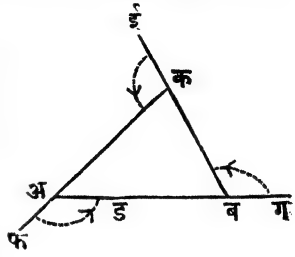
ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણ બાબુઓ એક તરફથી વધારી હોય, તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર.”

ત્રિકોણમાંના દરેક ખુણો અને તેની પાસેના બહારનો ખુણો એ એનો સરવાળો કેટલો છે ? “બે કાટખુણા.” એ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના બહારના ત્રણ ખુણા. એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “છ.” ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિષે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો ? “એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ.”



ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેના પ્રયોગ કરવો. ધારો કે અબ,બક,અક, એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. હ રથળથી એક ગાડી બ તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી બ પાસે આવશે, એટલે વક રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોઢું ટપકાંથી દેખાડેલા બ ખુણા જોટલું ફેરવવું



પડશે. ગાડી ક પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા ક ખુણા જોટલું તેને પોતાનું મોઢું ફેરવવું પડશે. ગાડી કઅ રસ્તે અ પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા અ ખુણા જોટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે હ બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.

ધારો કે વઅ લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું, તે બ પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું, તે ક પાસે ગઈ ત્યારે.....વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મોં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મોં જો ખુણામાં થઈને ફર્યું, તે ખુણા તો અબક ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે. અબક ત્રિકોણ ગમે તે પ્રકારનો લીધો હોય, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકોણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

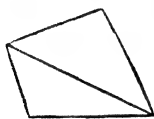
બહુકોણાકૃતિના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ અંધાર્ષ હોય એવી કોઈ પણ આકૃતિને બહુકોણાકૃતિ કહે છે.

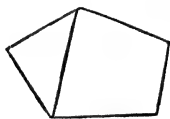
ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ અંધાર્ષ હોય એવી આકૃતિને ચતુષ્કોણ ક્રે ચોખુણુ કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને પંચકોણુ કહે છે.

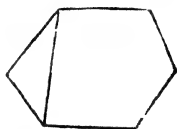
છ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને ષટ્કોણુ કહે છે.



ચતુષ્કોણુ.



પંચકોણુ.



ષટ્કોણુ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને સપ્તકોણુ કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને અષ્ટકોણુ કહે છે.

ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણુ લો. તેની બધી બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર.”

એજ પ્રમાણે પંચકોણુ, ષટ્કોણુ, સપ્તકોણુ, અષ્ટકોણુ, વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે ? “આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

૭૪મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણુ, પંચકોણુ, ષટ્કોણુ, વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે? “જે કાટખુણા.” એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે જે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? “આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર.” તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે જાનો સરવાળો આવ્યો? “અંદરના ખુણાઓનો.” તે કેટલો છે? “ચાર કાટખુણા.”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, પટ્ટકોણ, વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. પંચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(5 \times 2 = 10; 10 - 4 = 6)$$

પટ્ટકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(6 \times 2 = 12; 12 - 4 = 8)$$

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(7 \times 2 = 14, 14 - 4 = 10)$$

પંદર બાજુવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.....
.....વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે? “બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા.”

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની બીજી રીત—

કોઈ પણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ=૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨+૨ કાટખુણા=૪ કાટખુણા.

પંચકોણ=ત્રિકોણ+ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨+૪ કાટખુણા= ૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ=ત્રિકોણ+પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨+૬ કાટખુણા = ૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ=ત્રિકોણ+ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨+૮ કાટખુણા = ૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા કેટલી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (ક્ષ બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક જ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે ક્ષ) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો=ક્ષ×૨ કાટખુણા. તેમાંથી જ બિંદુ પાસેના ખુણા = ૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો=(ક્ષ×૨)-૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

અવકાશ ચતુષ્કોણના \angle અ, \angle બ, \angle ક, અનુક્રમે ૪૫, ૫૫, ને ૧૦૦; } અંશના છે, તો \angle દ કેટલા અંશનો ?
 ૧૦૦, ૫૦, ને ૧૧૦; }
 તથા ૧૨૦, ૧૦૦, ને ૧૨૦; }

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા ૧૦૦° અને ૪૦° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે ૫૩° અને ૨૭°, ૯૦° અને ૮૦°, ૧૧૦° અને ૨૮° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિત + પંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે ?

નિયમિત ૫ટ્ટકોણનો કેવડો ? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો ?

નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો ?

નિયમિત પંચકોણ, ૫ટ્ટકોણ, અષ્ટકોણ, અને દશકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો ૧૬૦° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણો કેવડો છે ?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અધી છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ ?

અવકર્ણક ૫ટ્ટકોણમાંના અ, ક, અને ઈ ખુણા સરખા છે, અને તેમાંના દરેક ખુણો જ, ડ કે ફ ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ જ, ડ, અને ફ એક ખીજની બરાબર છે); તો અ ખુણો કેવડો છે ?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો $1\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિને બાજુઓ કેટલી ? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરની છે એ વિષે)

અવ અને ડઈ બે સરખી લીટીઓ લો. અવના જ બિંદુ પાસે બમે તેટલો મોટો \angle અવક કરો. \angle ડઈફ, \angle અવક જેવડો.

+ જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને નિયમિત આકૃતિ કહે છે.

* એકરૂપ એટલે બધી બાજતમાં સરખા. બધી બાજતો એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને ક્ષેત્રફળ.

કરો. વક્ર ગમે તેટલી લાંબી હો. તેટલીજ લાંબી રૂંધ હો. કબ, ફડ સાંધો. અવ, ડર્ફ પર અને વક્ર, રૂંધ પર પડે એવી રીતે અવક્ર ત્રિકોણ ડર્ફ ત્રિકોણ પર મૂકો. અને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” (પુઠ). આ પરથી ત્રિકોણની એકરૂપતા વિશે કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

અવ જેવડી ડર્ફ લીટી હો. \angle અવક્ર, \angle વક્ર ગમે તેટલા મોટા ખુણા થઈને અવક્ર ત્રિકોણ પુરો કરો. \angle અવક્ર, \angle વક્ર જેવડા અનુક્રમે \angle ડર્ફ, \angle રૂંધ કરો. અવ, ડર્ફ પર અને વક્ર, રૂંધ પર પડે એવી રીતે અવક્ર ત્રિકોણ ડર્ફ ત્રિકોણ પર મૂકો. (પુઠ). તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

“એક ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

એક ગમે તેવો અવક્ર ત્રિકોણ દોરો. ડર્ફ બાજુ અવ જેવડી દોરો. ડર્ફ ખુણો અવક્ર ખુણો જેવડો કરો. અકબ ખુણો જેવડો કાગળના કડકો કાપી કાઢો. આ ખુણો રૂંધને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે રૂંધની સાથે \angle અકબ જેવડો ખુણો કરે. એ લીટી હમાં થઈને બરો. એવી રીતે ડર્ફ ત્રિકોણ દોર્યા પછી અવ, ડર્ફ પર અને વક્ર, રૂંધ પર પડે એવી રીતે અવક્ર ત્રિકોણ ડર્ફ ત્રિકોણ પર મૂકો. અને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” (પુઠ). આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

“એક ત્રિકોણના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના તેમને મળતા ભાગોની

(એટલે બીજના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના બે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજ ત્રિકોણના બે ખુણા છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહો. “ત્રણ.” કયા ત્રણ? (૧) “બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા.”

ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજી પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાળો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહેશે. (પૃ૦). આ ઉપરથી સમ-દ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે? “તે સરખા છે.” આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે.”

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? “દરેક ખુણો ૬૦°ના છે.

આ ઉપરથી સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “સમબાજુ ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો ૬૦°ના હોય છે,”

એક ગમે તેટલી લાંબી અથવા લીટી લેા. \angle અબક ગમે તેવડો સાંકડો ખુલ્લો લેા. \angle અબક જેવડો \angle બઅક કરો. અક અને બક માપો. આ પ્રયોગ ત્રણ ચાર વખતે જુદી જુદી રીતે કરો. ત્રિકોણના બે સરખા ખુણાઓની સામેની બાજુઓ કેવી હોય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે ?

“ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.”

અબ=૨", \angle અબક=૬૦°, અને \angle બઅક=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. બક, અક માપો. તેમની લંબાઈ અથવા સાથે સરખાવો. \angle વકઅ કેવડો છે ? (પુ.) અબ=૧", \angle અબક=૬૦° અને \angle બઅક=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. બક, અક માપો. તેમની લંબાઈને અથવા જોડે સરખાવો. \angle વકઅ કેવડો છે ? આ ઉપરથી, જે ત્રિકોણના બે ખુણા ૬૦, ૬૦ અંશના હોય છે, તે વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ? “તેનો ત્રીજો ખુણો ૬૦°નો હોય છે અને તેની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે.” સમબાજુ ત્રિકોણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. એમાંનો દરેક ભાગ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુણા અનુક્રમે ૩૦° અને ૬૦°ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકોણોમાં ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણની અર્ધી હોય છે.

$$(૧) \text{ વક}=૨", \angle \text{બ}=૯૦°, \angle \text{ક}=૬૦°$$

$$(૨) \text{ વક}=૪", \angle \text{બ}=૯૦°, \angle \text{ક}=૬૦°$$

$$(૩) \text{ વક}=૨.૫", \angle \text{બ}=૯૦°, \angle \text{ક}=૬૦°$$

લઈને ત્રિકોણ કરો. અક કેટલા ઇંચ છે ? અકની સાથે વક સરખાવો, અને આ ઉપરથી કાટખુણુ ત્રિકોણના સાંકડા ખુણા ૬૦° અને ૩૦°ના હોય, તો ૯૦° અને ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુઓ શા પ્રમાણમાં હોય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજાતો હોય તે કહો.

“જે કાટખુણુ ત્રિકોણમાંનો એક સાંકડો ખુણો ૩૦°નો હોય, તો તે ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે.”

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુઓ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજી પર પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાજુતનો તફાવત કે અસમાનપણું છે કે ? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, કે તે નીચેના ત્રિકોણ પર ખરાબર આવી રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂકી શકાય છે કે ? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ?

“એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની ખરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

જેમાં \angle અબક કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે અબક કાટખુણ ત્રિકોણ લો. ડર્ફ કાટખુણો દોરો. ઈફમાંથી બક ખરાબર ઈગ ભાગ કાપી કાઢો. ગ મધ્યબિંદુ ધારીને કઝ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે ઈંડને હ બિંદુમાં છેદે છે. ગહ સાંધો.

અબક અને હઈગ આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે અક કર્ણ=હગ કર્ણ, અને બક=ઈગ બાજુ છે.

\angle અબક, \angle હઈગ માપો અને તેમને સરખાવો. \angle અકબ, \angle હગઈ માપો અને તેમને સરખાવો. અબ, હઈ માપો અને તેમને સરખાવો. સરખામણી પરથી શું જણાઈ આવે છે ?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા કાટખુણ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ અનેક વાર કરો. આ ઉપરથી તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ?

“જો એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની અનુક્રમે

બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટાપણાને તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના નાનામોટાપણા સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની સામેનો ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા પર મૂકી જુઓ, અને જો સરખાવો. તમને કયો ખુણો મોટો જણાય છે? “મોટી બાજુની સામેનો.” બીજો વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો. તેની નાની બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે? (પુ. ૦). ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ ઉપલા પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે?

“ત્રિકોણની જે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે મોટી હોય છે, તેની સામેનો ખુણો નાની બાજુની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. \angle અबકથી મોટો \angle बअक લો. અक, बक માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની? અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ખુણો ગમે તેવડો લો. \angle बअक, \angle અबકથી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અक, बक માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની? આ ઉપરથી તમને કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે?

“ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટો હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે.”

	પહોળખુણ ત્રિકોણ.	સાંકડખુણ ત્રિકોણ.	કાટખુણ ત્રિકોણ.
સમખાંડ ત્રિકોણ.			
સમદ્વિખાંડ ત્રિકોણ.			
વિષમખાંડ ત્રિકોણ.			

ઉપર ત્રિકોણના જુદા જુદા પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ પાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપડી ખાંડુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનાર ખાનામાં ‘હા’ એમ લખો; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં “હોઈ શકે” એમ લખો.

ત્રિકોણની એક ખાંડુનો, બીજી ખાંડુઓના સરવાળા તથા બાદબાકી સાથેનો સંબંધ.

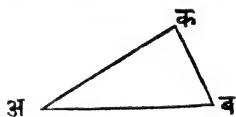
ફ ડ અ વ

એક અથ લીટી લો. તેને અ તરફ ફ સુધી લંબાવો. અફમાં ડ બિંદુ લો. અ મધ્યબિંદુ અને અડ ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. વ મધ્યબિંદુ અને વઅ+અડ (=વડ) કરતાં મોટી (દાખલા તરીકે વફ) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે? “ના” શા માટે? “વફ ત્રિજ્યા વઅ+અડ કરતાં વધારે છે તેથી.” આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેવડી લેવી જોઈએ? “વડ કરતાં નાની.” (પુનઃ) વડ કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે વર્તુળ પહેલાને ગ બિંદુમાં છેદે છે. હવે ગ બિંદુ અ ને વ સાથે સાધવાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તેમાં અથ તો પાયોજ છે, અને ગઅ, અડ

પરોપર છે, અને ગવ, અવ+અહના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલમ પડશે કે જો ત્રીજી લીટી અવ+અહના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તોજ એ વર્તુળો એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાબતોના ત્રિકોણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાબતોના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાબત મોટી હોય એવો ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શા નિયમ નીકળે છે ?

અવ=૩", બક=૨", અને કઅ=૮" લઈને તમે ત્રિકોણ દોરી શકશો ? અવ=૩", બક=૨", અને કઅ=૧" લઈને ત્રિકોણ દોરી શકશો કે ? “ના.” શા માટે નહિ ? આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રિકોણ બની શકે એટલા માટે કઅની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી લેવી જોઈએ ?

પાસેની આકૃતિમાં અ અને ક બિંદુઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ? અથી જ સુધી અવ સીધી લીટી દોરવાને બદલે અકબ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય, તો તેની લંબાઈ અવથી વધારે થશે કે ઓછી ? “વધારે ; કારણ કે અકબ વાંકી છે.” જ અને



ક વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે અકબ જેવી લીટી દોરી હોય, તો તે અકથી નાની થશે કે મોટી ? “મોટી ; કારણ કે અક સીધી લીટી છે, અને અક વાંકી લીટી છે.” એજ પ્રમાણે ક અને અ વચ્ચે અંતર કેટલું છે ? કથી અ સુધી કઅ સીધી લીટી ન દોરતાં કબઅ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ કઅથી વધારે થશે કે ઓછી ? “વધારે ; કારણ કે કબઅ વાંકી લીટી છે.” ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાબત અને બીજી બે બાબતોના સરવાળા, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાબતોના સરવાળા અને ત્રીજી બાબત એમની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે ?

“ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાબતોના સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪" અને બીજી ૨" હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? “એ ઇચ્છ કરતાં વધારે.” શા માટે? “કમકે એ ઇચ્છ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧+૧ ઇચ્છ લઈએ, તો એ લીટીઓનો સરવાળો $2+1=3$ એ ત્રીજી ૪ ઇચ્છ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી.” (પુન). આ ઉપરથી ત્રિકોણની એ બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિનં શું સમજાય છે? “ત્રિકોણની કોઈ પણ એ બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે.”

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠અવક ગમે તેવડો લો. અવ જેટલી ડહાં બાજુ લો. હં બિંદુ પાસે ∠ડહાંફ, ∠અવકથી નાનો કરો. હંફ, વકની બરાબર કરો. ડફ અને અક સાંધો. અક, ડફ કરતાં નાની છે કે મોટી? ∠અવક ગમે તેવડો દોરો. અવ જેવડી ડહાં લીટી લો. હં બિંદુ આગળ ∠ડહાંફ, ∠અવકથી મોટો કરો. હંફ, વકની બરાબર કરો. અક, ડફ સાંધો. અક, ડફથી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કકડામાંથી એ નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. એ નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (એ) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે એ સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે એ સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે એ સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. કયું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી એ સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી એ સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

“જો એક ત્રિકોણની એ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની એ બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાની એ બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા બીજાની એ બાજુઓની વચ્ચેના ખુણાથી

મોટો હોય, તો પહેલાનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો હોય છે.”

ગમે તે લંબાઈની અવ,ચક લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. ડઈ,ઈફ લીટીઓ અનુક્રમે અવ,ચક જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજો ત્રિકોણ કરો. અક,હફમાંથી કંઈ બાજુ મોટી છે ? \angle અવક, \angle ડઈફ માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? અક,હફના નાનામોટાપણા સાથે \angle અવક, \angle ડઈફના નાનામોટાપણાનો કંઈ પણ સંબંધ છે ? “હા.” (પુ૦). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી બીજી બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજી જોડનો બીજો એક ત્રિકોણ કરો. બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુ બીજની બે બાજુઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો છે. આ પાયાની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“જો બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો છે તેના પાયાની સામેના ખુણો, નાના પાયાવાળા બીજ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

ત્રિકોણના બીજ કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કકડામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ૦). શું જણાય છે ? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દોર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે.”

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લો. તેનો પાયો વાળીને દુભાગો. ત્રિકોણને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી

(અલખત સળરૂપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પૃ૦). “સમદ્રિયાણુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલખત) સરખા હોય છે.”

એજ નિયમ સમયાણુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે ? “પડે છે.” શા માટે ?

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણનાં શિરો-બિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પૃ૦). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિષે શી ખાસ બાબત જણાઈ આવે છે ? “ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજાને એકજ બિંદુમાં છેદે છે.”

આ લીટીઓ એક બીજાને છેદીને તેમના જે બાજુએ ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પૃ૦). તમને શું દેખાય છે ? “મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે.”

ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પૃ૦). આ ઉપરથી તમને પાંચો અને આ લીટીની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે ? “ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે.”

ઘડી વાળીને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ઘડી વાળીને સાંધો. આ ઘડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે.

ચાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક ખીજ પર મૂકીને સરખાવો. (પુ૦). તમને શું જણાય છે? “તે બધા એકરૂપ છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક ખીજ પર અરાઅર ચાવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો, અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધા સળો એક ખીજને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે? “હા.” (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી બે લંબ દોરો. તે જ્યાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે?

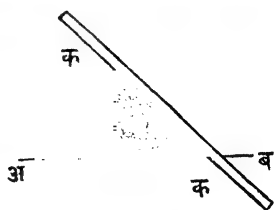
“ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

ત્રિકોણના ખુણા ઘડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. “તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

લંબ.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દારવાની રીત:—

ધારો કે અહીં આપેલી લીટી છે, અને ક આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અહીં લગાડીને માપ અહીં ઉપર કે નીચે રાખો. પછી માપના

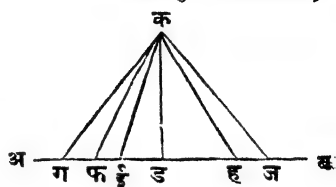


કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને કુટપટી મૂકો.

પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને જરાજરા અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટ્ટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

અવ લીટી પર કહ લંબ દોરો. પછી ક બિંદુમાંથી કઈ, કફ,

કગ, ગમે તે બીજી લીટીઓ અવને મળે એમ દોરો. કહની લંબાઈ માપો. પછી કઈ, કફ, કગની લંબાઈ માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી નાની લીટી કઈ? “લંબ.”



ક બિંદુમાંથી અવ સુધી લંબથી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? “ના.”

આ ઉપરથી, કોઈ એક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૌથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શા નિયમ સમજાય છે? “લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે.”

હકઈ અને હકફ ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? કઈ અને કફ આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ હકહ અને હકજ એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? કહ, કજમાં મોટી લીટી કઈ? કમાંથી અવ લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ કહ લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં હકઈ ખુણા કરતાં હકફ ખુણા મોટો છે, અને હકફ કરતાં હકગ મોટો છે, અને કઈથી કફ લીટી મોટી છે, અને કફથી કગ મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શો સંબંધ જણાય છે?

“આ ખુણા જેમ મોટો તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે.”

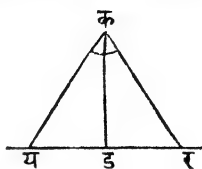
ઉપલી આકૃતિમાં \angle કઈડ, \angle કફડ, \angle કગડ, એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને કઈ, કફ, કગ લીટીઓનું નાનામોટાપણું, એ

એ વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે? “લંબ તરફનો ખુણો જેમ નાનો તેમ ખુણો કરનારી લીટી લાંબી હોય છે.”*

ચર લીટી પર દોરેલા કહડ લંબની સાથે ગમે તે ડકય ખુણો કરો. \angle ડકય બરાબર \angle ડકર કરો.

કય અને કર માપો. તેમને સરખાવો.

આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું જણાઈ આવે છે? “લંબની જોડે



સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.”

એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં ર બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના

ક બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને કર

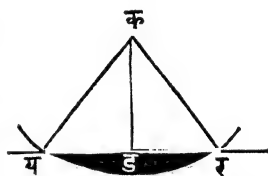
ત્રિજ્યાએ, આડી લીટીને ય

બિંદુમાં છેદે એવો રચ કેસ દોરો.

કય, કર સાધો. \angle ડકય,

\angle ડકરને સરખાવો. તમને શું

જણાઈ આવે છે?



ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક

બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ

લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય

છે? “આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ

બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા

ખુણા કરે છે.”

એક અબ લીટી દોરો. તેની બહાર ક બિંદુ લો. ક બિંદુથી

અબ કેટલે અંતરે છે? કમાંથી અબ સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ

દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ

* તેમ છતાં પણ ઉપલા બે પ્રયોગ પરથી એમ સિદ્ધ થતું નથી કે

ખુણાના પ્રમાણમાં જ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણો દોઢગણો મોટો

હોય તો લીટી દોઢગણી મોટી કે નાની હોય.

ક અને અવ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ એ સ્થળ વચ્ચેનું અંતર પૂછ્યું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું હોય તે આપણે કહીએ છીએ; માટે કયી અવ સુધીનું અંતર તે ક અને અવ વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર કયું છે તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે કે? “આ અંતર કમાંથી અવ પર દોરેલો લંબ છે.” કમાંથી અવ ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી કમાંથી અવ ઉપર દોરી શકાશે કે? “ના.” આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ, કે આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ જે વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુ-માંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

- (૧) અવ=૧.૨” લો. વ છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દોરો.
- (૨) અવ, કડ લીટીઓ દોરો, અને વમાંથી કડ પર લંબ દોરો.
- (૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ઘડી વાળીને દુભાગો. દુભાગનારી લીટી (સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી ખુણાના બુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. તેમને શું દેખાય છે? “તે સરખા છે.”

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લંબો દોરો. તેમને એક બીજાને મળતા સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તેમને કંઈ વિશેષ ધ્યાન જણાઈ આવે છે? (પુઠ). “તે બધા એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

જે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃતિની

સામસામી બાબુઓ સમાંતર છે, માટે તેને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહો. અટકળથી સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાબુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

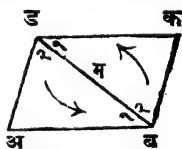
વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાબુઓ સમાંતર હોય છે તેને સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાબુઓ અને સામસામી ખુણા માપો. તેમના કોણો દોરો, અને કોણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ માપો, અને તેમને સરખાવો. (પુઠ). આ પરથી તમને કોઈ સામાન્ય નિયમ સમજાય છે? “સામસામી બાબુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.” સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણના કોણોથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પુઠ). શું જણાઈ આવે છે? “તેઓ એકરૂપ છે.”

(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

અબકડ સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ છે. બડ કહો છે. ડબનું મધ્યબિંદુ મ છે, એમ ધારો.

\angle અબડ = \angle બડક; } કારણ કે તે સમાંતર
 \angle અડબ = \angle કબડ; } લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ
 ખુણા છે.



હવે અબકડ ચતુષ્કોણની નકલ અબકડ ચતુષ્કોણ પર મૂકીને મ બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તો મબ, મડ બરાબર છે તેથી બ, ડ પર પડશે. જ્યારે બ, ડ પર પડે છે, ત્યારે \angle અબડ, \angle બડકની બરાબર હોવાથી બઅ, ડક પર પડશે. તેમજ ડમ = મબ, માટે ડ, બ પર પડશે; અને \angle અડબ = \angle કબડ છે, માટે ડઅ, વક ઉપર પડશે.

હવે ઘડ, ઢક પર પડશે, અને ઢઝ, ઘફ પર પડશે, માટે ઝ, ફ પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બતાવી શકાશે કે ઢક, ઘડ ઉપર પડે છે; કઘ, ઝઢ પર પડે છે; અને અલગત ક, ઝ પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે ઘડ, ઢકની બરાબર છે; ઝઢ, ઘકની બરાબર છે; અમ, મકની બરાબર છે; સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપરના બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ જણાઈ આવે છે?

“સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે,

(૨) સામસામી બાણુઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ દોરો. તેમના છેડામાંથી પહેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ દોરીને સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી બાણુઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે? “બધી બાણુ સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે.” એવી આકૃતિને ચોરસ કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ બીજા પર જુદી જુદી રીતે મૂકીને ચોરસના ખુણા અને બાણુઓ સરખાવો. શું જણાય છે?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને લંબચોરસ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક (સાંકડો કે પહોળો) ખુણા કરનારી એ સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી એ નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે, તેને સમપ્રતિબુજ ચતુષ્કોણ કહે છે. [સમપ્રતિબુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, બુજ એટલે બાજુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિબુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

“લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે. અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે.”

“સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે, અને ફક્ત સામસામી ખુણા સરખા હોય છે.”

“સમપ્રતિબુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.”

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરો:—

૧"; ૧.૨", ૧.૪", ૯ મિ.મી; ૧.૨ સે.મી; ૧.૫સે.મી; ૨.૨ સે.મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરો:—

૨", ૧"; ૧.૨", ૧"; ૧.૪", ૦.૮"; ૩", ૨"; ૨.૨,"

૧.૨"; ૩.૫", ૧.૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણો લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ=૧", \angle હઅવ=૪૫°; અવ=૧.૩", \angle હઅવ=૭૫°;
અવ=૧.૫", \angle હઅવ=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાજુઓ અને ખુણા લઈને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ	હઅ	\angle હઅવ
૨"	૧.૫"	૩૦°
૧.૨"	૧"	૧૨૦°
૨"	૨.૨"	૧૦૦°
૧.૭"	૧.૭"	૪૮°

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એમના બંને કર્ણ દોરો; અને કર્ણોના લાગે અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પુઠ). શું જણાઈ આવે છે? “ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને દુભાગે છે (એટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને તિર્યક્ ખુણે દુભાગે છે.”

વ્યાખ્યા—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને ચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસપાસેની બાજુઓ નાની મોટી હોય છે, તેને લંબચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા અને જે પહોળા) હોય છે તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા ને જે પહોળા) હોય છે તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને કાટખુણા ચોખુણુ કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક ચતુષ્કોણ દોરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામી ખુણા માપો. (૫૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હમેશજ સરખા હોય છે કે ? એવા ચતુષ્કોણને વિષમબાજુ ચોખુણુ કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણુની ફક્ત બેજ બાજુ સમાંતર હોય તો તેને સમલંબ ચોખુણુ કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણુ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણુનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે ?

એક વિષમબાજુ ચોખુણુ અને એક સમલંબ ચોખુણુ હાથે દોરો.

ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કહેવાય છે.

બધા કાટખુણુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે.”

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.” તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે ? “.....”

બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે.”

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણુ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે ? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે ?

ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તો મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં 'હા' એમ લખો.

	સામસામી બાજુએ અને ખૂણા સરખા છે?	મૂળું એક બીજાને ફાગે છે?	બધા ખૂણા કાટખૂણા છે?	મૂળું સરખા છે?	મૂળું એક બીજા પર લંબ છે?	પાસપાસેની બાજુ- એ સરખી છે?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખુણુ દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને સમાતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કણુ એક બીજાને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાતર છે કે કેમ તે જુઓ. (૫૦)

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“ ચોખુણુમાં જે—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી એક જોડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાતર હોય; અથવા

(૪) કણુ એક બીજાને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખુણુ સમાતરબાજુ હોય છે.”

પ્રશ્ન.

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણુ ચોખુણુ.

“ “ ૩" અને ૨ $\frac{૧}{૨}$ " “ “ “ “

“ “ ૩-૨" અને ૫" “ “ “ “

“ “ ૧-૫" અને ૨" “ “ “ “

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાતરબાજુ ચોખુણુ.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫" ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.

“ ૨" અને ૩" “ ૮૦° “

“ ૫" અને ૪" “ ૧૨૦° “

“ ૨" અને ૪" “ ૧૫૦° “

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખ્ખું કરો:—

અવ=૬૩ સે.મી., વ=૮૨°, વક=૮૨ સે.મી., ક=૯૦°,
કડ=૭૭ સે. મી.

અવ=૩૪", વક=૨૨", અડ=૨૫", અ=૬૮°, વ=૮૬°.

વ=૧૧૬°, વક=૧૪", ક=૯૯°, કડ=૧૫", ડ=૯૨°.

અ=૬૭°, વ=૧૧૩°, ક=૪૬°, અવ=૫૩", અડ=૮૬°.

વ=૧૨૨°, ક=૧૩૦°, ડ=૪૫°, વક=કડ=૧૬°.

અડ=૩", ડ=૧૧૮°, ડઅક=૨૭°, વઅક=૩૫°, અવ=૨૪°.

અક=૫૬°, વઅક=૫૮°, ડઅક=૫૯°, વકઅ=૫૮°,.

ડકઅ=૬૯°.

અવ=૧૫", વડ=૧૭", કડ=૨", અવડ=૧૧૮°, વડક=૨૩°.

અવ=કડ=૫૮ સે.મી; અડ=૪૭ સે.મી; અ=૭૨°, વડક=૪૬°.

પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[સૂચના:—આની પહેલાનો સર્વ ભાગ જોમને ચાલી ગયો હોય એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેર ન લેતાં પહેલા ખંડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી ખીણું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક લાકડાના ધન કરતાં ખીણે ધન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ જોઈને કહીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના

નિયમો બાંધવામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની આબુજોના અને ખુણાઓના જે ધર્મો ઉપર આ નિયમો નક્કી થયા છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને ભૂમિતિ કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનો વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ, અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડ્યું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; મિતિ=માપવું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘પદાર્થ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જોટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમનો આકાર હોય છે. પેટી ચોખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખંડો હોય છે. જ્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જો તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

અધા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેના સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે:—અધા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કડકા વગેરે) એવા લો, કે જેમની પહોળાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જડાઈ ઓછીવત્તી હોય;

અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાજુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેના સામાન્ય નિયમ કઢાવો:—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ, એ પરિમેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ—આ પરિમેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિમેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીલકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાજુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાજુને તે પદાર્થની લંબાઈ; લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાજુને તેની પહોળાઈ; અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઉભી આવેલી) બાજુને તેની જડાઈ કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૌથી મોટી બાજુને લંબાઈ, તેનાથી નાની બાજુને પહોળાઈ, અને સૌથી નાની બાજુને જડાઈ, એમ પણ કહે છે. એમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાજુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

પૃષ્ઠ.

આ દડાને જુદી જુદી બાજુથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? પૈસો સર્વ બાજુએથી જુઓ.

તેનો આકાર બધી તરફથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ ઈંટ તરફ તમે ગમે તે બાજુએથી જુઓ તોપણ તે સરખીજ દેખાય છે કે ? તે લંબાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? પહોળાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? ઉપલી બાજુએથી કેવી દેખાય છે ? દડો બધી બાજુએથી સરખો દેખાય છે, પણ આંકણી, પૈસો, ઈંટ, વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી. એનું કારણ શું ? “તેમની બાજુઓ જુદા પ્રકારની છે, એટલે તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે.”

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કયો ધર્મ સમજાય છે ? “તેમને* પૃષ્ઠો હોય છે.”

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે ? શંકુને કેટલાં ? ગોળાર્ધને કેટલાં ? પૈસાને કેટલાં ? પેટીને કેટલાં ? “દડાને એક પૃષ્ઠ હોય છે, શંકુને અને ગોળાર્ધને બે પૃષ્ઠ હોય છે, પૈસાને ત્રણ પૃષ્ઠ હોય છે, પેટીને છ પૃષ્ઠ હોય છે.” વાકાચુંકા પત્થરને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે ? “તેને અનેક પૃષ્ઠ હોય છે.”

દડાનું પૃષ્ઠ અને ધનનું પૃષ્ઠ તપાસો. તે બે વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ? “દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ધનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે.”

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં—સપાટ અને વક્ર.

જેનાં બધાં પૃષ્ઠો સપાટ હોય, એવા પદાર્થને આછામાં આછાં કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠો હોય છે ? “ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકોણાકાર મિનારો કે શંકુ.”

કોઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “કોર.” આ કોર ભૂમિતિમાંથી કઈ આકૃતિ જન્મી દેખાય છે ? “લીટી જન્મી.” બેથી વધારે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “આણી.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ?

* બાજુ કરતાં પૃષ્ઠ સખ્દ વધારે સારો છે. બાજુ સખ્દનો કોર એવો પણ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ સખ્દનો એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ સખ્દનો ઉપયોગ કયો હોય તો અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડો થશે નહિ.

“અણી.” અણી, ભૂમિતિમાંની કંઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે ?
“ખિંદુ જેવી.”

એ પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી ‘(પાસપાસેનાં)
એ પૃષ્ઠોને એક બીજાથી ઝોળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી.’
એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શંકુને પૃષ્ઠ કેટલાં ? કોરો કેટલી ? ખુણા કેટલા ?
અણી કેટલી ? એ પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “કોર.” કોરો
મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “અણી.” ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ
વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે ? (ધન, શંકુ, ઈટ.....
વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના
છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને
લીટીના છેડા ખિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે ? “હા.” પહોળાઈ હોય છે કે ?
“હા.” જડાઈ હોય છે કે ? “ના.” (જડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર
કોઈ આપે તો નીચેનો પ્રયોગ કરીને યોગ્ય જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના
અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે ? “હા.” આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની
બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધું પાણીજ છે અને ઉપર બધી
હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી
પુરું થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કંઈ જડાઈ
હોવાનો સંભવ છે ?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી
પુરું થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને પૃષ્ઠને જડાઈ
મળી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઉં ધસાતાં ધસાતાં એટલું ધસાયું, કે તેને
જડાઈ નામની પણ ખીલકુલ રહી નહિ; એથી આપણે કલ્પના કરીએ,

તો તેના લંબાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ તેને જડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈનો જ વિચાર કરવો પડે છે; જડાઈનો ખીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ ઠેકાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠને એક ઘણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે.

પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં? “ એ. ” પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે? “ લીટી જેવા. ”

વર્તુળ, પરિધ, વ્યાસ, કોંસ, અને જ્યાં એમને પરિમેયો કેટલાં? ખાતળા કાગળનો કકડો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર, એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા:—પૃષ્ઠને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ ખીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે? એ સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ઘનની કે ઈંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી એ વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. એ સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. એ વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે? “ સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક બીજા સાથે અચળ મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે. ”

સપાટ પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લેા. તેમને સાંધનારી લીટી દોરા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃષ્ઠમાં રહે છે કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે ? વાંકા અને ઉંડા પૃષ્ઠ ઉપર બે બિંદુ લેા. તેમને સાંધનારી લીટી દોરાથી દર્શાવો. (પહેલાની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃષ્ઠમાંજ રહે છે, કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે ? વક્ર પૃષ્ઠમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃષ્ઠમાં રહે છે કે ?

આ પરથી સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠની વચ્ચે તેમને શો તફાવત જણાય છે ? દડાના કે નળાકારના પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે ? “ના.”

સપાટી.

કોઈ પૃષ્ઠ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃષ્ઠ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધાર્યું હોય, તો તે જ જગા રોકે છે, તે તે પૃષ્ઠની સપાટી છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છોકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીઉં આડું મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયોગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવો.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને તેમની વચ્ચે જ સીધી લીટી દોરી હોય, તો તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તો તે સપાટીજ નથી.)

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઝોઝામાં ઝોઝાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ?
“ત્રણ.”

ઝોપડીની છ બાજુમાંથી કઈ બાજુએ એકજ સપાટીમાં હોય છે? દાઝડીની કઈ બાજુએ એકજ સપાટીમાં હોય છે?

ત્રણથી વધારે નાની મોટી લાકડીઓ ભેગમાં ખોસવી, અને તેમના પર પાટીઈ આંદું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઈ જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમ નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઈ મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં ખીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છોકરને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીનો બરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બાજુ ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડો.

ધારો કે મેજના બે પાયા નીચે પથ્થર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને ખીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવો.

એકાદ પાટીઈ જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટીમાં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું?

એક કચનું ખ્યાલું પાણીથી ભરો. પાણીના પૃષ્ઠની સપાટી કઈ? આ કાડ ખીજા એક સપાટી છે એમ ધારો. કાંઈ પાણીમાં ત્રાંસું બેળો. આપણે જોઈએ છીએ કે કાંઈની સપાટી પાણીના પૃષ્ઠને છેદે છે. આ બે સપાટી જ્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે? “લીટી.”

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે? “લીટી.” તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે? “ના. તે વાંકી લીટી હોય છે.”

લીટી.*

કાળા પાટીઆ પર પટી મૂકવી. પટીની બાજુએ ચાકની બાણી પાટીઆ પર ધામેથી દાખવી; એટલે પાટીઆ પર બિંદુ પડશે. પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે. એવી રીતે વારંવાર ટપકાં કિમેચો હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાતફ ઠઠાવવી.

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લેવાં. અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરો પલાળીને, દોરો લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સાચી ટુંકી છે? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી? “સીધા.” આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે બિંદુઓની વચ્ચે દોરો. દોરી શકાય છે? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ જાણવામાં આવે છે? મુકરર અંતર પરના બે બિંદુઓની વચ્ચે જો કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો ઠોકો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાધો. આ દોરાથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાધો. પહેલા દોરાથી અને બીજા દોરાથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે? આ પરથી બે બિંદુઓ વચ્ચે જો એક સીધી લીટી અને

* આ ભાગમાં સીધી લીટી અને વક્ર લીટી વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં ‘લીટી’ એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવા.

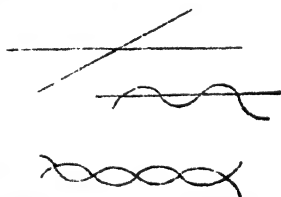
હું એ વાત ફક્ત સ્થૂળ રીતે જોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખજું. શાસ્ત્રની દૃષ્ટિથી એમ કહેવું બરાબર નથી.

ખીજ કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પેઠી સીધી ટુંકી લીટી કઈ હોય છે, એ ત્રિષે શું સમજાય છે ?

બે ખિંડુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ ખિંડુઓને સાંધનારી ખીજ એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે કે ? “ના.” આ બે ખિંડુઓ વચ્ચે તમે ખીજ કાઢી સીધી લીટી દોરી શકશો ? “ના.” આ ઉપરથી સીધી લીટીનો ખીજને કયો ધર્મ જણાય આવે છે ?

કાળા પાટીઆ પર બે ખિંડુ લો. તેમના પર ચુંકો મારો. તેમની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાધો. ખીજ બે ત્રણ દોરા તેવીજ રીતે તાણીને બાધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદા જુદા સ્થાનમાં પડે છે ? આ પરથી બે ખિંડુઓની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી લીટીઓ કેટલી કાઢી શકાશે, એ ત્રિષે શું જણાય છે ? “એક ખિંડુથી બીજા ખિંડુ મુઘી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે.”

એક સીધી લીટી દોરો. તેને છેદનારી ખીજ એક સીધી લીટી દોરો. એક વાંકીચુંકી લીટી લો. તેને વધારેમાં વધારે ખિંડુઓમાં છેદનારી ખીજ સીધી અથવા વાંકી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા



પ્રમાણે) દોરો. બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં ખિંડુઓમાં છેદે છે ? “એક.” વાંકી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં ખિંડુમાં છેદે છે ? “એકથી વધારે ખિંડુઓમાં.”

એકથી વધારે ખિંડુઓમાં એક બીજીને છેદનારી બે સીધી લીટીઓ દોરી શકાય કે ? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ સમજાય છે ? “બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને એકથી વધારે ખિંડુઓમાં છેદતી નથી.”

બે સીધી સળી લો, અને તેમની મદદથી કોઈ જગાને ઘેરી ભેવાનો પ્રયત્ન કરો. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે ? “ના.”

એ સીધી લીટી દોરો, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. તેમ કરી શકાય છે કે ? “ના.” એ વાંકી લીટીઓ લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. ઘેરી શકાય છે કે ? “હા.” આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શો તફાવત જણાય છે ? “એ સીધી લીટી જગા ઘેરી શક્તી નથી.”

એક આંખ મીચો, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના બંને છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાઈ આવે છે ?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તે નીચેની લીટી પર ખરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કડકા કિલ્લાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે ? “સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર ખરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકી લીટીઓનું એમ થતું નથી.”

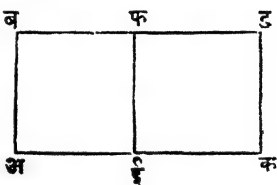
વ્યાખ્યા.—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (કિલ્લાવ્યો હોય તોપણ) ઉઘાડીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (બંને ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર ખરાબર ખેસે, તો તેને સીધી લીટી કહે છે. કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે ? “ના.” ત્યારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં આછામાં આછાં કેટલાં બિંદુ જણાવવાની જરૂર છે ? “જે.”

આપેલાં બે બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો ?

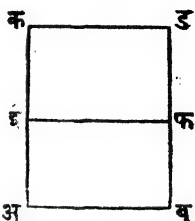
કોઈ બેતરમાં એક જાડથી બીજા જાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો ?

અબઢક એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કડકો છે. એને બરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે બે ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં રૂંફ લીટી શું દર્શાવે છે ?



“અબઢક કાગળના કકડાને દુભાગનાર સળની જગા.” રૂંફ લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને રૂંફ અને અબ વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય ? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જે દસ લીટીઓ વડે રૂંધી અ સુધીની જગા પુરાઈ જાય, અને રૂંધી અ સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે ? “એક ઇંચ.” જે દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કકડો દર્શાવે છે, તો રૂંફ લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે ? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી ? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના કયા ભાગમાં જશે ? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ ? “કાપી શકાશે.” સારે સળને પહોળાઈ છે કે ? “ના.” સળને જે પહોળાઈ નથી, તો રૂંફ લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે ?

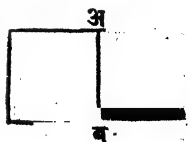
અવકાશ એક ખેતર છે, અને તે દૂર અને જા એ બે ભાઈઓને વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના અવકાશ અને ફાઈલ એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધા. ધારો કે જ્ઞાને ભાગે દક્ષિણ તરફનો કકડો આવ્યો, અને જ્ઞાને ભાગે ઉત્તર તરફનો કકડો આવ્યો. આ બે કકડા પાંચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કઈ જગા છે કે? “ના.” અ



છે એમ જો તમે મંદો. તો તે બે ભાઈઓમાંથી કોને ભાગે આવી છે, એ તમારે મંદવું જોઈએ. બે કકડાની વચ્ચે જો જગા નથી, તો ફાઈલ લીટી દોરી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનો કયો ભાગ દર્શાવે છે? “કોઈપણ નહિ” ફાઈલ લીટીની નીચે અથવા લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પછી એક લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી વીસ લીટીઓ ફાઈલ અથવા સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે ફાઈલ અથવા સુધીની જગા રોકાઈ જાય, અને ફાઈલની લંબાઈ જો વીસ ફુટ હોય, તો દરેક લીટી કેટલી જગા દર્શાવે? “એક ફુટ પહોળી” ફાઈલ લીટી એક ફુટ પહોળી જગા દર્શાવે, તો એ કકડો ફાઈલ લીટી દર્શાવાતી એક ફુટ પહોળી અને ... ફુટ લાંબી જગા) કોને? જ્ઞાના અને જ્ઞાના ભાગના કકડાઓની વચ્ચે જો જગા રાખવાનું કારણ નથી, તો ફાઈલ લીટી શા માટે દોરી છે? “.....” જો આ લીટી જગા દર્શાવતી નથી, તો તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? “જ્ઞા || જમીન ક્યાં પુરી થાય છે, અને જ્ઞાની જમીન ક્યાં સર થાય છે, તે તે દર્શાવે છે.”

ત્યારે લીટી ખરેખર જગા દેખાડે છે, કે હદ? “હદ.”

બે છેક લીસા ધન લઈને એક ખીખરે બરાબર અડકાડીને મૂક્યા હોય, તો તેમનું ચિત્ર આપણે શી રીતે દોરીશું? પાસે દોરેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં અથવા લીટી કાગળ પર કેટલીક જગા રોકે છે, એ કારણથી શું આપણે બે



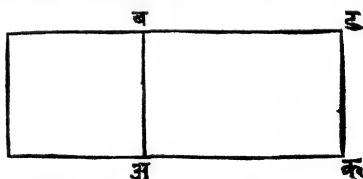
ધનની વચ્ચે કેટલીક જગા છે એમ ધારી શકીએ ? “ના.” ત્યારે આ લીટી શા માટે દોરી છે ? આ લીટી ક્ષેત્રફળ દેખાડે છે કે હદ ? “હદ.”

એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે ખીજો કોઈ રંગ લગાડ્યો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ઘોળો ભાગ, એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો ? તેને જો રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી ? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે ? “ના.”

ઉપલા દાખલામાં બે ધન જ્યાં એક ખીજાને મળે છે, અથવા જ્યાં ખેતરના બે ભાગ એક ખીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે ? “ના.” લંબાઈ છે કે ? “છે.” આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ. પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી ? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે ? “ના.” એવી લીટી કાઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર જોતાં લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.*

* પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે તેમાં

અ ઝાડથી બ ઝાડ સુધી એક કરોળીઆએ પોતાનો તાંતણો તાણ્યો છે. હવે ખેતરના નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ કેટલી



છે તે કહી શકશો ? ધારો કે તે સ્કેલ ૧"=૧૦' છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો ? “બધા લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ ભરે તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફુટ સમજવા.” અબ લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે ? “ના,” એમ કદાચ તમે કહેશો. અબથી આકૃતિના છેડા સુધી એક ખીજાને અડકી રહી એવી લીટીઆ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી અબથી કહ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો અથી ક સુધીનું

લીટી દોરવાનો હેતુ—કોઈ પદાર્થ ક્યાં સર થાય છે, તે ક્યાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે, એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે લીટી, એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

વાળ અથવા ઝીણા દોરો એ લીટી છે કે ? “ના.” કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,.....વગેરે લીટીઓ છે કે ? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ, એમાંથી ક્યાં પરિમેયો હોય છે ? “લંબાઈ.” ત્યારે હવે લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે ? “એક.”

ખિંદુ.

એક ખીજને છેદતી એ લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક ખીજને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો ભાગ બૂસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે, તે ખિંદુઓ, અને એ લીટીઓ એક ખીજને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે તે કહો. “ખિંદુ.”

એક દશાંશ ઇંચ પહોળી એ લીટીઓ એક ખીજને છેદે, તો તે જે ખિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે ખિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? “એક દશાંશ ઇંચ.”

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળી એ લીટીઓ એક ખીજને છેદે, તો તે જે ખિંદુમાં છેદે છે તે ખિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી ? “એક વીસાંશ ઇંચ.”

અંતર ૧૦ ફુટ હોય, તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{10 \times 12 = 120}{120} = 1$ ઇંચ

અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળીઆનો તાંતણો દર્શાવે છે, તે જ એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળીઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થતું કે ? જો લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી ? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જડાઈ) બરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. “એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી.” ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે ? “હા.”

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો એ લીટીઓ એક બીજીને જે બિંદુમાં છેટે છે તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ?
“બીલકુલ નહિ.”

એ લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેટે છે, ત્યાં બિંદુ બને છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે બિંદુને પણ લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં બિંદુ અમુક સ્થાનમાં હોય છે, તેથી તેને સ્થાન કે સ્થિતિ હોય છે.

તેથી, ‘જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે બિંદુ,’ એવી બિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વમધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ,.....એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ અને પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઢવાં અશક્ય છે; માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા પુરેપુરી લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણો કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણો કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ધનાકૃતિ બને છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.



ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.



(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુક્તિહતમાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે, અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહને સિદ્ધાંત કહે છે.

પ્રમેય અને **કૃત્ય**—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને પ્રમેય કહે છે, અને બીજાને કૃત્ય કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતોમાંથી એમ ને એમ નીકળે છે, અથવા જે તેની મદદથી હુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો ઉપસિદ્ધાંત કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અને અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલું હોય છે, તેને પ્રતિજ્ઞા કહે છે. જેમકે:—“સમબાણુ ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય છે.”

પક્ષ અને **સાધ્ય**—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાંનો પક્ષ કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું સાધ્ય કહેવાય છે.

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષમાં અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાંનું સાધ્ય મૂક્યું હોય; અને સાધ્યને બદલે પક્ષ અથવા પક્ષમાંની પેલી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય છે તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ કહે છે. જેમકે:—“ સમબાણુ ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય છે,” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “ સમકોણુ ત્રિકોણુ સમબાણુ હોય છે,” એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. “જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે, અને

જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા છ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે;” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “ જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે છ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે;” આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળનાં પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરંતુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિતો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી ઠરશે. આ કારણને લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

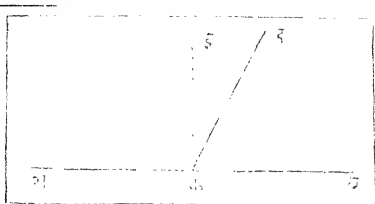
+	એટલે વત્તા.	—	એટલે ઓછા.
=	એટલે ની બરાબર.		એટલે સમાંતર.
>	એટલે થી મોટા.	<	એટલે થી નાના.
∴	એટલે માટે, તેથી.	∴	એટલે કારણ કે.
	એટલે ખુણા.	△	એટલે ત્રિકોણ.

○	એટલે વર્તુળ.	□	એટલે સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ.
---	--------------	---	---------------------------

≡ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.
 પ્ર૦ એટલે પ્રમેય. ક૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પ્રશ્ન—કેવળ સીધી લીટી અથવા સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય— \angle અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા.

અથવા પર કેવળ લંબ હોય, તો \angle અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા એ સિદ્ધાંત છે. પરંતુ અથવા પર કેવળ લંબ ન હોય તો—

રચના—અથવા પર કઈ લંબ દોરો.

સિદ્ધતા— \angle અકડ = \angle અકઈ + \angle ઈકડ, (પ્રત્યક્ષ.)

\angle બકડ = \angle બકઈ - \angle ઈકડ,

$\therefore \angle$ અકડ + \angle બકડ = \angle અકઈ + \angle બકઈ.

પણ \angle અકઈ + \angle બકઈ = ૨ કાટખુણા. (રચના)

$\therefore \angle$ અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દોરી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧લાં પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અમલ અને કમલ બા બે લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે, અને અમલ કાટખુણો છે; તો મ બિંદુ પાસેના બાકીના ખુણા કાટખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અવક ત્રિકોણમાં \angle અવક = \angle અકવ, અને વકને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૩. અવક ખુણાને ઘટ્ટથી દુભાગ્યો છે, અને ઢલ, ફેં સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવફેં = \angle કવફેં એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવ લીટીને કઢ લીટી ક ખિંદુમાં મળે છે, અને \angle અકઢ, \angle કવ અનુક્રમે કફ અને કફ લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો \angle ફકફ કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. જો અવ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ અવની એકજ બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ કાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો એ પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો એ કાટખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના બુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પદ્ધતિ—અકઢ અને કવ એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને તેમનો સરવાળો એ કાટખુણો છે.

સાધ્ય—કઅ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો કઅ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો અકને વધારીને અકફ સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અકફ સીધી લીટી છે,

$$\therefore \angle$$
અકઢ + \angle કવફેં = ૨ કાટખુણો. (પ્ર. ૧)

પણ \angle અકડ+ \angle કકબ=૨ કાટખુણા, (પક્ષ)

$\therefore \angle$ અકડ+ \angle કકઈ= \angle અકડ+ \angle કકબ.

દરેક બાજુમાંથી સાધારણ \angle અકડ બાદ કર્યો;

\therefore શેષ \angle કકઈ=શેષ \angle કકબ.

\therefore કઈ, કબમાં મળી જાય છે, એટલે કઈ, કબની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ કઅ, કબ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧માં કઅ અને કબ એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને \angle અકડ+ \angle વકડ=૨ કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં \angle અકડ+ \angle વકડ=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે, અને કઅ, કબ એક સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય ૧નો વ્યત્યાસ છે.

૨જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવ લીટીમાંના અ બિંદુમાંથી અવની બંને બાજુએ કાટખુણા કરીને અક અને અડ લીટીઓ દોરેલી છે, તો કઅડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અમક લીટીમાંના મ બિંદુમાંથી તેની બંને બાજુએ મવ, મડ લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે \angle અમવ= \angle કમડ; તો વમડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

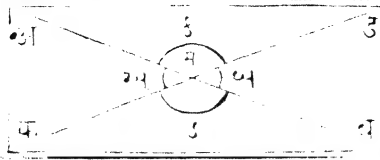
૩. મ બિંદુમાંથી મવ, મઅ, મક, એ ત્રણ લીટી દોરેલી છે; અને મપ લીટી \angle વમઅને અને મદ લીટી \angle અમકને દુભાગે છે. હવે જો પમદ કાટખુણો હોય, તો વમક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના સામસામા ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદતી હોય, તો તેમના શિરોબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા એક બીજાની

બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અબ અને કડ સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે બેડ થાય છે: એક $\angle અ$ અને $\angle બ$ ની બનેલી, અને બીજી $\angle ક$ અને $\angle ડ$ ની બનેલી.

સાધ્ય— $\angle અ = \angle બ$; અને $\angle ક = \angle ડ$.

સિદ્ધતા— \therefore કમડ એક સીધી લીટી છે, અને અમ તે પર પડે છે;

$$\therefore \angle અ + \angle ક = 2 \text{ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૧)}$$

\therefore અમબ એક સીધી લીટી છે, અને ડમ તે

પર પડે છે;

$$\therefore \angle બ + \angle ક = 2 \text{ કાટખુણા. (પ્ર૦ ૧)}$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ક.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle ક$ સાધારણ કાઢી લીધો;

$$\therefore \text{શેષ } \angle અ = \text{શેષ } \angle બ.$$

તેજ પ્રમાણે $\angle ક = \angle ડ$ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

$$(\angle ક = \angle ડ \text{ એ સિદ્ધ કરો.})$$

૩જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો કાટખુણાના બુજોને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની* બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા જ ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. અમડ અને અમક એ લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે. મય, $\angle અમબ$ ને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે મય વધારી હોય તો તે $\angle કમડ$ ને દુભાગે છે.

* જો બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તેને તેમનું મેલનબિંદુ કહે છે.

પ્રમેય ૧થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને ૩ સિદ્ધ કરો.

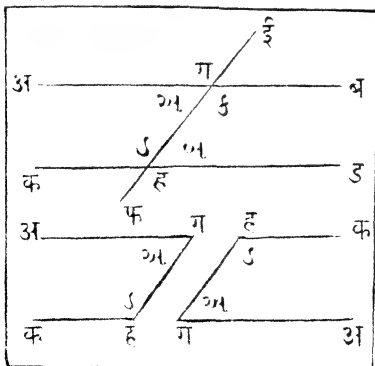
૨. એક બીજીને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. મ બિંદુમાંથી મઅ, મબ, મક, મડ, આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle અમબ = \angle કમડ, અને \angle વમક = \angle અમડ; તો અમ અને મક, તેમજ વમ, અને મડ લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે. અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને છેદ અને વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કહ લીટીઓને રૂંધ લીટી ગ અને હ બિંદુઓમાં છેદે છે, અને $\angle અ$ અને $\angle બ$ વ્યુત્ક્રમ પુણા સરખા છે.

સાધ્ય—અવ ॥ કહ.

સિદ્ધતા—

$$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨ કાટપુણા, \quad (પ્ર. ૧)$$

$$\text{અને } \angle બ + \angle ડ = ૨ કાટપુણા, \quad (પ્ર. ૧)$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ડ.$$

$$\text{પણ } \angle અ = \angle બ, \quad (પક્ષ)$$

$$\therefore \angle ક = \angle ડ.$$

અગ્રહક આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો) અને તે અગ્રહક આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે હ બિંદુ ગ પર પડે, અને હક, ગબની દિશામાં પડે.

તો $\therefore \angle ડ = \angle ક$, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore હગ, ગહની દિશામાં પડશે.

અને \therefore હગ = ગહ,

\therefore ગ બિંદુ હ બિંદુ પર પડશે.

હવે $\therefore \angle અ = \angle બ$,

\therefore ગઅ, હડની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે ગઅ અને હડ જે દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં હક અને ગઅ પડે છે.

હવે અવ, કહ લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ પણ એક બાજુએ મળવી જોઈએ. તે અ અને ઢની બાજુએ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી હક, ગઅ એ લીટીઓ પણ અ અને ક તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ. પણ જો અવ, કહ એ અ, ક તરફ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમની અને ગઅ, હડની દિશા એકજ હોવાથી ગઅ અને હડ પણ અ, ક તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ (એટલે કે અવ અને કહ બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જો એ સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તો જો બંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે એ સીધી લીટીઓ જગા ઘેરી લે છે. પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૦૯મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે અબ,કઢ કોઈ પણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

૪થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

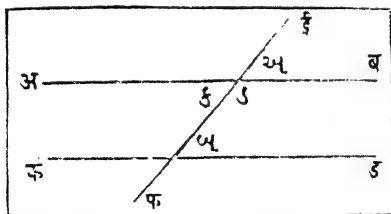
૧. અબકઢ એક ચતુષ્કોણ છે અને અક તેના કર્ણ છે. જો \angle અબક બરાબર \angle અકઢ, અને \angle કઢઅક = \angle અકબ, તો અબકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી એ સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

(૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા

(૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) પક્ષ—અબ અને કઢ લીટીઓને ફફ છેદે છે, અને સંગત ખુણા અ અને બ બરાબર છે.

સાધ્ય—અબ ॥ કઢ.

સિદ્ધતા—

$$\angle \alpha = \text{સામેનો } \angle \delta;$$

(પ્ર. ૩)

$$\text{પણ } \angle \alpha = \angle \theta,$$

(પક્ષ)

$$\therefore \angle \theta = \angle \delta.$$

અને $\therefore \angle \theta$ અને $\angle \delta$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,

\therefore અથવા ॥ કડ.

(પ્ર. ૪)

(૨) પક્ષ—ઈફ લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા θ અને δ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—અથવા ॥ કડ.

સિદ્ધતા—

\therefore અથવા એક સીધી લીટી છે અને તેને ફર્ફ મળે છે,

$$\therefore \angle \delta + \angle \epsilon = 2 \text{ કાટખુણા.}$$

(પ્ર. ૧)

$$\text{પણ } \angle \theta + \angle \epsilon = 2 \text{ કાટખુણા,}$$

(પક્ષ)

$$\therefore \angle \delta + \angle \epsilon = \angle \theta + \angle \epsilon.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle \epsilon$ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો;

$$\therefore \angle \delta = \angle \theta.$$

અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

\therefore અથવા ॥ કડ.

(પ્ર. ૪)

પમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસેની આકૃતિમાં,

(૧) જો $\angle \alpha = \angle \delta$ હોય,

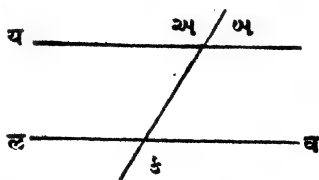
અથવા

(૨) $\angle \theta + \angle \delta = 2$

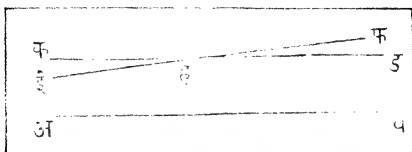
કાટખુણા હોય; તો

ચર ॥ લઘ છે એમ બતાવો.

૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક બીજાને સમાંતર હોય છે.



પ્લેક્ટરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજને છેલ્લારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજ સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, કહ, ફફ સીધી લીટીઓ એક બીજને હ પિંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી કહ, અબને સમાંતર છે; તો ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકશે નહિ. કારણ કે કહ લીટી અબને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે કે કહ અને અબની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે ફફ અને કહની વચ્ચેનું અંતર બધું સરખું નથી, ત્યારે ફફ અને અબ વચ્ચેનું અંતર બધું સરખું હોઈ શકે નહિ. માટે ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં યુક્તિલક્ષનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:--

જો એક સીધી લીટી બીજ બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

આ વિધાન ખરું જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

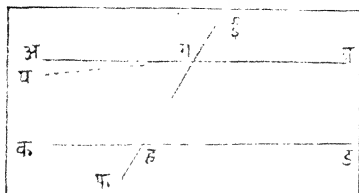
પ્રમેય ૬.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

(૧) બે બાજુના ખુણા સરખા કરે છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા કરે છે; અને

(૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પક્ષ—અબ અને કડ સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને ફફ તેમને ગ અને હમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) \angle અગહ અને \angle ગહડ એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

(૨) \angle ફગહ અને \angle ગહડ એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) ફફની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા \angle બગહ અને \angle ગહડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો \angle અગહ અને \angle ગહડ સરખા ન હોય, તો એક ગય લીટી એવી દોરો, કે યગહ અને ગહડ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

૧) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ યગહ = વ્યુત્ક્રમ \angle ગહડ, (રચના)

\therefore ગય \parallel કડ. (પ્ર. ૪)

પણ અબ \parallel કડ, (પક્ષ)

\therefore ગય અને અબ એ બંને કડને સમાંતર.

પણ એ અશક્ય છે, (પ્રતિદર્શનું પ્ર. પ્ર.)

$\therefore \angle$ અગહ, \angle ગહડ, એ સરખા નથી એમ

માની શકાયું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે \angle બગહ= \angle ગહક એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

\angle ઈગવ=સામેના \angle અગહ, (પ્ર. ૩)
અને \angle અગહ= \angle ગહડ, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)
 $\therefore \angle$ ઈગવ= \angle ગહડ.

(એજ પ્રમાણે \angle ઈગઝ= \angle ગહક.)

(૩) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અગહ= \angle ગહડ, (પ્ર. ૬, ભાગ ૧)
અને \angle બગહ, \angle અગહનો ન્યૂનતાપૂરક છે,
 $\therefore \angle$ બગહ, \angle ગહડનો પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

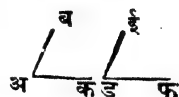
ઉપસિદ્ધાંત—જે બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છે:—

(૧) જો \angle બઅક અને \angle ઈડફની

બાજુઓ સમાંતર હોય અને એકજ દિશામાં

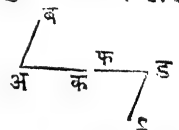
દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૨) જો \angle બઅક અને \angle ફડઈની બાજુઓ સમાંતર હોય

અને તે સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય,

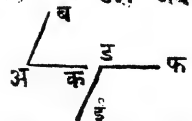
તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) ડફ,અક એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને ડઈ, અબ

સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાબતમાં

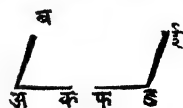
ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.



(૪) જો ડફ,અક સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને

ડઈ,અબ એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો

તે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોવા જોઈએ.



દ્વિતીય પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અથવા ત્રિકોણમાં $\angle B = \angle C$, થક પાયાને સમાંતર ડાई દોરેલી છે; તો $\angle ADE = \angle AED$ એ સિદ્ધ કરો.

૨. § * જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેના પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાજુએ ત્રિકોણની બે બાજુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. પછી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જે એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી તે લીટીની એકજ બાજુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાજુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણા, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકબેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળો ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના બુજે બીજાના બુજે ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

§ * આ ચિન્હ જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છોડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો એમ નક્કી.

૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લીટીથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને મળવાથી કાટખુણુ ચોખુણુ બને છે.

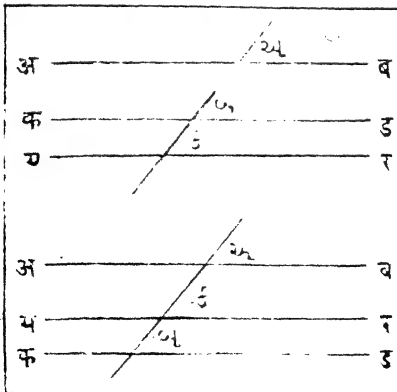
૧૦. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અથવા ત્રિકોણના બે શિરોબિંદુમાંથી થક પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણુ થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. અથ અને કહ એ સમાંતર સીધી લીટીઓને પ અને દ બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાણુ પરના પ અને દ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખતે મપ અને એક વખતે મદમાંથી વાળીને મ બિંદુ પદ, અથ, અને કહથી સરખે અંતરે છે એમ ખતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

બે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે, તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કડ ॥ ચર

સાધ્ય—અવ ॥ કડ.

રચના—અવ, કડ, અને ચરને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.

($\angle અ, \angle બ, \angle ક$, આ સંગત ખુણા છે.)

સિદ્ધતા— \therefore અવ ॥ ચર, (પક્ષ)

$\therefore \angle અ = \text{સંગત } \angle ક. \text{ (પ્ર. ૬)}$

તેમજ \therefore કડ ॥ ચર, (પક્ષ)

$\therefore \angle બ = \text{સંગત } \angle ક. \text{ (પ્ર. ૬)}$

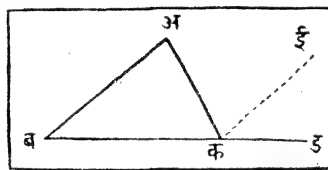
$\therefore \angle અ = \angle બ.$

\therefore આ ખુણા સંગત છે,

\therefore અવ ॥ કડ. (પ્ર. ૫)

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય— $\angle અ + \angle વ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા.

રચના—બકને ડ સુધી વધારો. કમાંથી વઅ ॥ કઈ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore વઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને અવક છે છે,

$\therefore \angle અ = \text{અંતરગત } \angle અકઈ. \text{ (પ્ર. ૬)}$

અને \therefore વઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને અવક

છે છે,

∴ \angle વ = સંગત \angle ફકડ. (પ્ર. ૬)

∴ \angle અ + \angle વ = \angle અકઈ + \angle ફકડ.

દરેક બાજુમાં \angle અકવ ઉમેરો.

∴ \angle અ + \angle વ + \angle અકવ = \angle અકઈ + \angle ફકડ + \angle અકવ.

પણ \angle અકવ + \angle અકઈ + \angle ફકડ = ૨ કાટખુણા, (કારણ કે વક્ર એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

∴ \angle અ + \angle વ + \angle અકવ = ૨ કાટખુણા.

એટલે અવક ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

આ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં \angle વ = \angle ક છે; વગતે અ તરફ ડ મુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે \angle કમડ, \angle વ અથવા \angle કનો બમણો છે.

૨. કાટખુણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સાબીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમખાણુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના બે તૃતીયાંશ બરાબર હોય છે.

૪. અઘ્ઘ ત્રિકોણના અ અને ઘ ખુણાને દુભાગનારી લીટી ઢમાં મળે છે; તો અઘ્ઘ ખુણો પહોળો છે એ સિદ્ધ કરો.

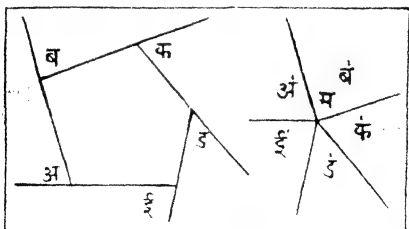
૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો ખીળ બે ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો; અને એનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો ખીળ બે ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહોળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે બે ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટખુણ ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધીલીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.



*બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય, અથવા અંદરની બાજુથી અંતઃવક હોય, એવી.

પક્ષ—અવકલ્પે આ બહિર્વક સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી \angle અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈ, આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય— \angle અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ = ૪ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કોઈ પણ મ બિંદુ લેા. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તોપણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાજુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાજુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાંથી દોરો.

સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે \angle અ', \angle બ', \angle ક', \angle ડ', \angle ઈ' આ ખુણા છે;

$\therefore \angle$ અ = \angle અ', \angle બ = \angle બ', \angle ક = \angle ક', \angle ડ = \angle ડ', \angle ઈ = \angle ઈ'; (છટ્ટા પ્રમેયનો ઉપસિદ્ધાંત)

$\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ = \angle અ' + \angle બ' + \angle ક' + \angle ડ' + \angle ઈ'.

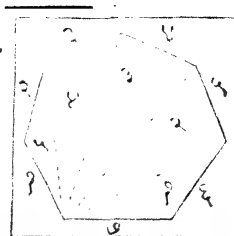
અને $\therefore \angle$ અ' + \angle બ' + \angle ક' + \angle ડ' + \angle ઈ' = ૪ કાટખુણા, (પ્ર. ૧, ઉપ.)

$\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ = ૪ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—સ બાજુના સીધીલીટીવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો (૨ સ-૪) કાટખુણા થાય છે.

હમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય હતો આધાર લીધા સિવાય ઉપલો ઉપસિદ્ધાંત, એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકોણ બનાવીને, સિદ્ધ કરો. (નીચેની આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકોણની સંખ્યા સ-૨ થાય છે.)



૨. એક ત્રિકોણની અબ, બક, કઅ બાબુઓ વધારવાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા પૈકી બે ખુણાનો સરવાળો બે બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો $\frac{2}{3}$ કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. અબક ત્રિકોણમાં અઢ, ચઢ, કફ એવી દોરી છે, કે તેઓ અબ, બક, કઅની સાથે ઢઅબ, ઈંબક, ફકઅ ખુણા સરખા કરે છે. હવે બે અઢ, ચઢ, કફ એક બિંદુમાં ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના ખુણા અબક ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. અબકઢઈ એક પંચકોણ છે, અને એની કોઈ પણ બાબુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ બાબુઓ બંને તરફ વધારી હોય, તો ફ, ગ, હ, ચ, લ બિંદુઓમાં મળે છે; તો ફ, ગ, હ, ચ, લ ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

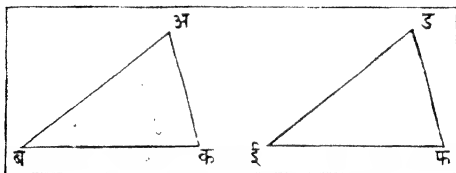
૫. જેમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે ૬૦° , ૩૦° , ૪૫° , હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને બાબુ કેટલી ?

૬. જેનો એક બહારનો ખુણો ૧૫° , ૭° , ૧૧° , ૬° , ૫° અથવા ૪૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

૭. જેનો અંદરનો ખુણો ૧૦૮° , ૧૨૦° , ૧૩૦° , ૧૪૪° , અથવા ૬૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણમાં અવ=ડઈ, અક=ડફ, અને $\angle A = \angle D$.

સાધ્ય— $\triangle અવક = \triangle ડઈફ$.

સિદ્ધતા—

$\triangle અવક$ ને $\triangle ડઈફ$ પર એવી રીતે મૂકો, કે અ બિંદુ ડ પર પડે, અને અવ બાજુ ડઈની દિશામાં પડે.

\therefore અવ=ડઈ, (પક્ષ)

\therefore બ શિરોબિંદુ ઈ પર પડે છે.

અને $\therefore \angle A = \angle D$, (પક્ષ)

\therefore અક, ડફની દિશામાં પડે છે.

અને \therefore અક=ડફ, (પક્ષ)

\therefore ક શિરોબિંદુ ફ પર પડે છે.

$\therefore \triangle અવક, \triangle ડઈફ$ પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. *જો અવ અને કઢ સીધી લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે હુમાળે, તો અકબઢ આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની અવ અને અક સરખી બાણુઓમાં ફર અને ય બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે અક્ષ=અય; તો એમ સિદ્ધ કરો કે કક્ષ=વય છે અને કક્ષ અને વય, વક સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. *જો અવ અને કઢ સીધી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે, તો અવકઢ આકૃતિ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ થાય.

૪. *અવક ત્રિકોણના વક પાયાનું ઢ મધ્યબિંદુ છે. અ અને ઢ સાધી, અને અઢને ઈ સુધી એવી રીતે વધારો, કે ઢઈ=અઢ થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે અવ=ઈક, અને અક ॥ ઈવ.

૫. અવકઢ એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં અવ=કઢ, અઢ=વક, અને $\angle અ = \angle ક$ છે; તો અવકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ચોરસનો કર્ણ જે ખુણાઓમાં થઈને જાય છે તેમને દુભાગે છે અને ચોરસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરો.

૭. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકોણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૮. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાણુનાં મધ્યબિંદુમાંથી તે બાણુઓ પર દોરેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૯. * લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બંને છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૦. અવકઢ અને ચરલવ ચતુષ્કોણોમાં અવ=ચર, વક=રલ, કઢ=લવ, $\angle વ = \angle ર$, અને $\angle ક = \angle લ$; તો આ આકૃતિઓ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * અવ અને કઢ લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તો અક અને વઢ સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવો.

૧૨. બે સમઢિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો એક ત્રિકોણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલો છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરો કે તે ત્રિકોણોમાંના એકનાં શિરોબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

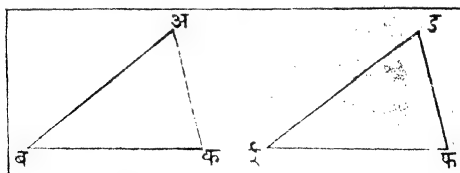
૧૩. અબક સમઢિબાણુ ત્રિકોણની અબ અને અક બાણુ પર અબહ અને અકચ એવા સમબાણુ ત્રિકોણ બહારની બાણુએ દોરેલા છે; તો કહ=ચક એ સિદ્ધ કરો.

૧૪. અબક સમઢિબાણુ ત્રિકોણની અબ અને અક બાણુ પર બહારની બાણુએ અબહચ અને અકલમ ચોરસ દોરેલા છે; તો ચમ=કચ એ બતાવી આપો.

૧૫. અબકઢ ચોરસમાં મ બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. મઅ પર અઢની બાણુએ અમઈફ ચોરસ દોર્યો છે; તો ચમ=ઈફ એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજાના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાણુ તેને મળતી આવતી બીજાની એક બાણુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧લો—

પક્ષ—અબક અને ઢઈફ આ બે ત્રિકોણમાં $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, અને $BC = EF$ (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાણુઓ.)

સાધ્ય— \triangle અવક = \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

\triangle અવક, \triangle ડઈફ પર એવી રીતે મૂકો, કે વ, ઈ પર પડે, અને વક, ઈફની દિશામાં પડે.

હવે \therefore વક=ઈફ, (પક્ષ)

\therefore ક, ફ પર પડે છે.

અને \therefore \angle વ= \angle ઈ અને \angle ક= \angle ફ, (પક્ષ)

\therefore વઅ, કઅ અનુક્રમે ઈડ, ફડની દિશામાં પડે છે.

\therefore અ, ડ પર આવી રહે છે.

\therefore \triangle અવક = \triangle ડઈફ.

પ્રકાર રજો—

પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં \angle વ= \angle ઈ, \angle ક= \angle ફ, અને અવ=ડઈ (અને ત્રિકોણોમાંના એકેક સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા— \angle અ+ \angle વ+ \angle ક=૨ કાટખુણા, (પ. ૮)

\angle ડ+ \angle ઈ+ \angle ફ=૨ કાટખુણા, "

\therefore \angle અ+ \angle વ+ \angle ક= \angle ડ+ \angle ઈ+ \angle ફ.

પણ \angle વ+ \angle ક= \angle ઈ+ \angle ફ, (પક્ષ)

\therefore શેષ \angle અ=શેષ \angle ડ.

હવે અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

\therefore \angle અ= \angle ડ,

\angle વ= \angle ઈ,

અને અવ = ડઈ;

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ. (પ. ૧૧. પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણ ત્રિકોણ પૈકી એકનો કર્ણ અને એક સાંકડો.

ખુણા બીજા ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણોના સરખા ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. અથવા ત્રિકોણમાં અબ=અક; તો બ અને ક ખુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મોના ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * અથવા ત્રિકોણમાં \angle બ= \angle ક; તો બ અને ક શિરો-બિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ ખુણાના બુજોથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * અથવા ત્રિકોણના બ અને ક ખુણાને દુભાગનારી વચ્ચે અને કમ લીટીઓ મ બિંદુમાં મળે છે. વક, કઅ, અબ પર અનુક્રમે મય, મર, મલ લંબ દોરેલા છે; તો મય=મર=મલ એ સિદ્ધ કરો.

૮. ગ અને હ એક બીજાને છેદનારી લીટીઓ છે, અને ય એક ત્રીજી લીટી છે. યમાં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે ગ અને હથી સરખે અંતરે હોય. આ વાત કયારે અશક્ય હોય છે?

૯. પચરસ ચતુષ્કોણનો પરકર્ણ \angle પ અને \angle રને દુભાગે છે; તો \triangle પચર \triangle પસર એ સિદ્ધ કરો.

૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું અવ લંબાંતર કમાં દુભાગેલું છે. ક બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને પ અને ચ બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે; તો કપ=કચ એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અથવા એક ચતુષ્કોણ છે, અને બડ પર અઈ અને

કફ લંબ દોરેલા છે. હવે જો અઈ, કફ બરાબર હોય, તો બડ, અકને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓ સરખી હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજને દુભાગે છે.

૧૪. અબકડ એક ચતુષ્કોણ છે, અને અક કર્ણ \angle અ, \angle કને દુભાગે છે; તો અક, બીજ કર્ણ બડની સાથે કાટખુણા કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. અબ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો અ અને બમાંથી આ લીટી પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. અબ લીટી પર અ અને બ છેડા આમળ વિરૂદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને અબના મધ્યબિંદુ કમાં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે ઢ અને ફમાં મળે છે; તો અડ=બઈ, અને કડ=ફઈ એ સિદ્ધ કરો.

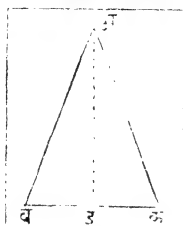
૧૭. એક વર્તુળની કઅ અને કબ ત્રિજ્યાઓ એક બીજી પર લંબ છે. અમ અને બન તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંબ છે; તો અમ=કન અને બન=કમ એમ બતાવી આપો.

૧૮. અબકડ ચતુષ્કોણના અ,બ,ક,ડ ખુણા અનુક્રમે ફાઈગહ ચતુષ્કોણના ફ,ફ,ગ,હ ખુણાની બરાબર છે; અબ, કડ અનુક્રમે ફાઈ, ગહની બરાબર છે; અને અડ, બક લીટીઓ એવી છે, કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણ એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. અબક ત્રિકોણનાં અ,બ,ક શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે બક, કઅ, અબ બાણુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ ઢ,ઈ,ફ બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે ઢઈફ ત્રિકોણની બાણુઓનાં અ,બ,ક મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણ છે, અને તેમાં અવ=અક.

સાધ્ય— $\angle વ = \angle ક$.

રચના— $\angle વ$ અકને દુભાગનારી અડ દોરો. ધારો કે તે બકને ઢમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

\therefore અવડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં—

અવ=અક,

(પક્ષ)

અડ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે,

$\angle વઅડ = \angle કઅડ$;

(રચના)

$\therefore \triangle અવડ \cong \triangle અકડ$.

(૫-૧૦)

$\therefore \angle વ = \angle ક$.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો 60° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની સરખી બાણુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેના બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. અબક અને ઢબક આ બે સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ એકજ પાયા વક પર છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે; તો \angle અબક = \angle અકઢ એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો વકની સામસામી બાણુએ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ+સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાણુઓ સરખી હોય તો સામસામી ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધા હોય તો તે ત્રિકોણ ઠાટખુણુ ત્રિકોણ હોય છે.

૮. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દુભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્ય બિંદુમાંથી સરખી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦ * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૩. સમબાણુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

૧૪. *સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની સરખી બાણુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યો હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. અથક ત્રિકોણમાં અથ=અક; \angle અ અને \angle કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મથ, \angle થને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

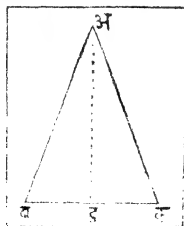
૧૭.* સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. અથક સમબાણુ ત્રિકોણની અથ અને અક બાણુઓ પર થઅઢ, કઅઈ સમબાણુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો ઢઅ,અઈ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. અથ, એક અર્ધવર્તુળનો વ્યાસ છે, અને વ પરિધ પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો અથથ ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાણુઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં \angle વ= \angle ક.

સાધ્ય—અક=અવ.

રચના—અવક ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે વકને ઢમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—અવક અને અકક ત્રિકોણમાં—

$$\angle$$
વ= \angle ક, (પક્ષ)

$$\angle$$
વઅક= \angle કઅક, (રચના)

અક સાધારણ છે;

$$\therefore \triangle$$
અવક \equiv \triangle અકક. (પ. ૧૧)

$$\therefore$$
 અવ=અક.

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમબાળ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રક્ષ.

૧. ત્રિકોણના બે બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાળ હોય છે.

૨. સમદ્વિબાળ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાંચે એ ત્રણ મળીને સમદ્વિબાળ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. અવક સમદ્વિબાળ ત્રિકોણમાં અવ=અક અને વ ને કમાંથી સામી બાળુઓ પર દોરેલા લંબ દ્વમાં મળે છે; તે દ્વ=દ્વક એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવક સમદ્વિબાળ ત્રિકોણમાં અવ=અક, અને \angle વ તથા \angle કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તે મવ, \angle વને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતાં સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલા ત્રિકોણ સમદ્વિબાળ હોય છે.

૬. અવકક મધ્યકોણમાં અવ=અક, અને \angle વ= \angle ક; તે કવ=કક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણના અક પાયામાં પ,ચ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle વઅપ= \angle કઅચ છે. બે અવ=અચ હોય તો અવક સમદ્વિબાળ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવકહ ચતુષ્કોણના અ અને વ ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને અવ ॥ કહ છે; તો અહ ॥ વક એ સિદ્ધ કરો.

૯. અવક ત્રિકોણમાં $\angle વ = \angle ક = ૨\angle અ$, અને $\angle વ$ ને દુભાગનારી લીટી અકને હમાં મળે છે; તો અહ=વહ=વક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. અવક સમખાળુ ત્રિકોણની વક, કઅ, અવ ખાળુઓ પર અનુક્રમે વકહ, કઅઈ, અવક સમખાળુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો $\angle હ, \angle ઈ, \angle ફ$ એક સમખાળુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક ખાળુઓમાં હ અને ઈ ખિંદુઓ એવી રીતે લો, કે હઈ, વકને સમાંતર થાય; અને વહની બરાબર થાય.

૧૨. અવક કાટખુણુ ત્રિકોણના અક કર્ણમાં હ ખિંદુ એવું લીધું છે, કે $\angle હકવ = \angle હવક$ છે; તો બતાવી આપો કે $હક = હવ = હઅ$.

૧૩. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોખિંદુને કર્ણના મધ્યખિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે, એ દિવસ પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

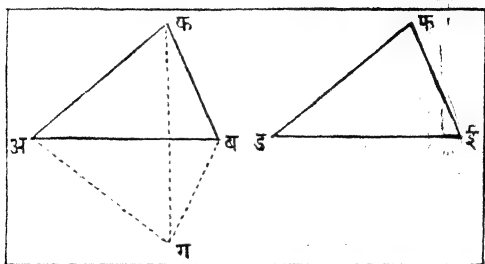
૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોખિંદુમાંથી પાયાના મધ્યખિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોખિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમઘિખાળુ હોય છે.

૧૫. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં (૧૨૨ પડે તો પાયાવધારીને) એવું એક ખિંદુ લો, કે તેનું અ અને કથી અંતર સરખું હોય.

૧૬. આપેલી લીટીમાં એક અ ખિંદુ છે, અને તે લીટીની બહાર એક વ ખિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક ક ખિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) વક અને કઅનો સરવાળો એક આપેલી લીટીથી મોટો થાય; (૨) વક અને કઅની બાદબાકી એક આપેલી લીટી બરાબર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અવ=ડઈ, અક=ડફ, બક=ઈફ.

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ અવ છે.

\triangle ડઈફ ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો કે તેનું ડ શિરોબિંદુ અ પર પડે, ડઈ પાચો અવની દિશામાં પડે, અને ફ શિરોબિંદુ કથી વિરૂદ્ધ દિશામાં પડે.

\therefore અવ=ડઈ,

(પક્ષ)

\therefore ઈ, બ પર પડશે.

ધારો કે ક શિરોબિંદુ ગ સ્થાનમાં પડે છે.

ક, ગ સાધો.

હવે \therefore અક=ડફ, અને ડફ=અગ, (પક્ષ અને સ્થાના)

\therefore અક = અગ.

$\therefore \angle$ અકગ = \angle અગક.

(પ્ર. ૧૨)

અને \therefore બક=ઈફ, અને ઈફ=વગ, (૫૧ અને ૨૫ના)

\therefore બક=વગ.

$\therefore \angle$ બકગ= \angle વગક. (૫. ૧૨)

$\therefore \angle$ અકગ + \angle બકગ = \angle અગક + \angle વગક.

$\therefore \angle$ અકવ = \angle અગવ.

પણ \angle અગવ એટલે \angle ડફઈજ છે,

$\therefore \angle$ અકવ = \angle ડફઈ.

હવે \therefore અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

અક=ડફ, (૫૧)

કવ=ફઈ (૫૧)

\angle અકવ = \angle ડફઈ;

$\therefore \triangle$ અવક $\equiv \triangle$ ડઈફ. (૫. ૧૦)

૧૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવકાઢ ચતુષ્કોણમાં અવ=અડ; કવ=કઢ; તો અક કર્ણ \angle અ અને \angle કને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓ સરખી છે, અને બક પર બકઢ ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે બઢ=કઢ; તો અડ, \angle અકને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. ક્ષયજ્ઞ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ચ અને જ્ઞ આ સરખા ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે, તો બતાવી આપો કે મક્ષ, \angle ક્ષને દુભાગે છે.

૫. અવ પાયાની સામસામી બાજુએ અવક અને અવઢ આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે કઢ, અવને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. ડઅની એકજ બાજુએ ઈડઅ અને ફઢઅ આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે ઈફ વધારી હોય તો તે ડઅને કાટખુણે દુભાગે.

૭. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં અઢ=વક છે, અને અક અને વઢ કહ્યો સરખા છે, તો \angle અકઢ= \angle વઢક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. * સમખાળુ ચતુષ્કોણના કહ્યો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને દુભાગે છે, અને એક ખીજને કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. અમવ અને કમઢ આ સીધી લીટીઓ એક ખીજને છેદે છે, અને અમકઈ તથા વમઢક એ સમખાળુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે ઈફ લીટી મમાં થઈને જાય છે, અને અક, વઢને સમાંતર છે.

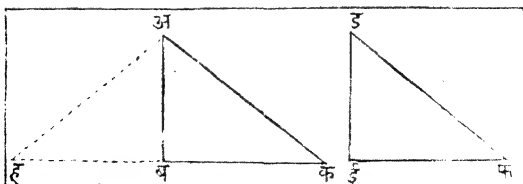
૧૦. અવક, અવઢ ત્રિકોણો અવની એકજ બાજુએ છે. અક=વઢ, અઢ=વક, અને અઢ તથા વક, મમાં મળે છે; તો મઅક અને મવઢ ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (ઉપલા ૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૮મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણુ ત્રિકોણનો કહ્યો અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણુ ત્રિકોણના કહ્યો અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ બે કાટખુણુ ત્રિકોણ છે; તેમના અક અને ડફ કહ્યો સરખા છે, અને અવ=ડઈ છે.

સાધ્ય— \triangle અવક= \triangle ડઈફ.

[સિદ્ધતા—: અવ=ઢઈ, (૫૬)

∴ \triangle ઢઈફ એવી રીતે મૂકી શકાય કે ઢ, અ પર પડે; ઈ, વ પર પડે; અને ફ, કની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારો કે ફ, હ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle અવક=૧ કાટખુણો, અને \angle અવહ=૧ કાટખુણો; (૫૬)

∴ \angle અવક+ \angle અવહ=૨ કાટખુણો.

∴ હવક એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

∴ અહક ત્રિકોણમાં અક=અહ,

∴ \angle અકવ= \angle અહવ. (પ્ર. ૧૨)

પણ \angle અહવ એટલે \angle ઢફઈજ છે,

∴ \angle અકવ= \angle ઢફઈ.

હવે અવક, ઢઈફ ત્રિકોણોમાં—

\angle વ= \angle ઈ, (૫૬)

\angle ક= \angle ફ, ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

અવ=ઢઈ; (૫૬)

∴ \triangle અવક \equiv \triangle ઢઈફ. (પ્ર. ૧૧)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * ખુણાના બંને લુગ્નેથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક; અને અહ, વક પર લંબ છે; તો \triangle અવક \equiv \triangle અકહ.

જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

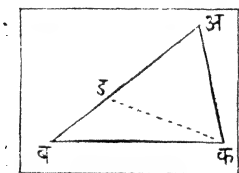
૪.* જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫.* અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ વમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે અમ, અ ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા થ અને કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો અમ, \angle અકને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય, તો મોટી બાજુની સામેના ખુણો મોટો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં અવ $>$ અક.

સાધ્ય— \angle ક $>$ \angle વ.

રચના—અવમાંથી અક જેવડો અડ કકડો કાપી કાઢો. ડક સાંધો.

સિદ્ધતા—

\therefore અડક ત્રિકોણમાં અડ = અક, (રચના)

$\therefore \angle$ અડક = \angle અકડ. (પ્ર. ૧૨)

$\therefore \angle$ અડક એ વડક ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે,

$\therefore \angle$ અડક $>$ \angle વ. (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ \angle અડક = \angle અકડ,

$\therefore \angle$ અકડ $>$ \angle વ.

અને $\therefore \angle$ ક $>$ \angle અકડ,

$\therefore \angle$ ક $>$ \angle વ.

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ૧૬મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) કડ, \angle અને દુભાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) \angle ડકવ = $\frac{1}{2}(\angle$ ક - \angle વ); અને (૩) \angle અકડ = $\frac{1}{2}(\angle$ વ + \angle ક); એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

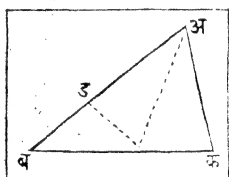
૨. અવકલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં અવ $>$ અક; તે \angle અકવ $>$ \angle વકક એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની અવ, વક, કક, કઅ બાજુઓ નો અનુક્રમે નાની થતી બળ, તે \angle કકઅ $>$ \angle કવઅ, એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની પાસેના ખુણા હંમેશ માંકડા હોય છે.

૫. અવકલ ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાજુ અવ છે. અને કક સૌથી મોટી છે; તે \angle વ $>$ \angle ક અને \angle અ $>$ \angle ક છે એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

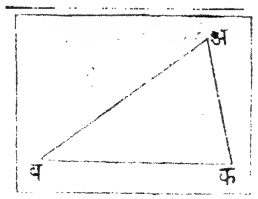
૬. પાસેની આકૃતિમાં આપેલા અવક ત્રિકોણનો અ ખુણો દુભાગો અને અકની બરાબર અક બાગ કાપી કાઢો; અને એ આકૃતિની મદદથી ૧૬મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.



૭. ત્રિકોણની એક બાજુ બીજીથી મોટી હોય તે ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, ત્રિકોણની મોટી બાજુ અને પાયાની સામેનો ખુણો દુભ ગનારી લીટી એ બેની વચ્ચે હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તે મોટા ખુણાની સામેની બાજુ (નાના ખુણાની સામેની બાજુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણમાં \angle ક \angle બ.

સાધ્ય—અવ \angle અક.

સિદ્ધતા—

જો અવ, અકથી મોટી ન હોય, તો તે અકની બરાબર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

બરાબર હોય તો \angle અ \angle ક.

(પ્ર. ૧૨)

નાની હોય તો \angle ક \angle અ.

(પ્ર. ૧૬)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરુદ્ધ છે;

\therefore અવ \angle અક.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત ખોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું, તેને ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતા નીચેની રચના કરીને આપી શકાય છે:—

અવને છેદનારી કક્ષ લીટી એવી દોરો, કે \angle અકક્ષ \angle ક
(\angle ક \angle અ) થાય.

પછી અક્ષ \angle અક છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટખુણ ત્રિકોણનો કઈ સર્વ બાજુઓથી મોટો હોય છે.

૨. * પહોળાખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી મોટી હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણના પાયાની સામેના અ શિરોબિંદુમાંથી વક્ર પર અડ લંબ દોર્યો હોય, તે બતાવી આપો કે અવ \angle અક, અને અક \angle અક છે; અને આ પરથી (અવ+અક) \angle અક છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. અવક ત્રિકોણના અ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ દ્વારા મળે છે, અને અવ \angle અક; અવ \angle અક એ સિદ્ધ કરો.

૫. અબક ત્રિકોણનાં બ અને ક શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબો ક્ષ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અબ > અક હોય, તો ક્ષબ > ક્ષક એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની અબ, અક બાજુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ ઈ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અબ > અક, તો ઈબ < ઈક એ સિદ્ધ કરો.

૭. અબક ત્રિકોણની અબ, અક સરખી બાજુઓ છે; અને તેમને એક લીટી ક્ષ અને ય બિંદુઓમાં છેદે છે. બક પાયાને ક તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે અય > અક્ષ.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી મોટી હોય છે.

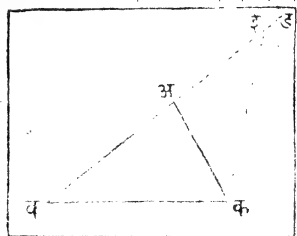
૯. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંનો દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર ફક્ત એજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરનાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (વઅ+અક) > વક;
 (૨) (કવ+વઅ) > કઅ; અને
 (૩) (અક+કવ) > અવ.

રચના—વઅને હ મુધી વધારો. અહમાંથી અક નેવડો અઈ કકડો કાપી કાઢો. કઈ સાધો.

સિદ્ધતા—

∴ અઈક ત્રિકોણમાં અઈ=અક, (રચના)

∴ ∠અકઈ=∠અઈક. (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠વકઈ > ∠અકઈ,

∴ ∠વકઈ > ∠અઈક.

હવે ઈવક ત્રિકોણમાં ∴ ∠વકઈ > ∠વઈક,

∴ વઈ > વક (પ્ર. ૧૭)

એટલે (વઅ+અઈ) > વક.

પણ અઈ=અક,

(રચના)

∴ (વઅ+અક) > વક.

એજ રીતે (કવ+વઅ) > કઅ, અને (અક+કવ) > અવ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાહબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(અવ+અક) > વક.

(પ્ર. ૧૮)

દરેક બાજુમાંથી અક બાહ કરો.

∴ અવ > (વક-અક).

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અ ખુણા દુબાગીને ૧૮મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથી બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. અવક ત્રિકોણમાં Δ બિંદુ એવું લીધું છે, કે Δ અડ=અવ છે; Δ અડ ખુણાને દુભાગનારી લીટી વકને રૂમાં મળે છે; તે Δ અડ=રૂડ છે એમ બતાવી આપો, અને તે ઉપરથી Δ વક > Δ અડ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. અવક ત્રિકોણની અક બાજુમાં ગમે ત્યાં એક Δ બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે Δ વઅ+અક > Δ વડ+અક.

૯. અવક ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક Δ બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે Δ વઅ+અક > Δ વડ+અક.

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ જ્યાં વ્યાસથી નાની હોય છે.

૧૧. અક પાયા પર અવક ત્રિકોણ અને અપવક ચતુષ્કોણ છે; Δ વ, Δ ચ બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તે ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેના ખુણા કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેક્સિમમ બિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈ પણ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રણે મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. અવક Δ ચતુષ્કોણની અંદર Δ એક બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે $(\Delta$ મઅ+મવ+મક+મડ) > $(\Delta$ અક+મડ)

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે, પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ બતાવી આપો.

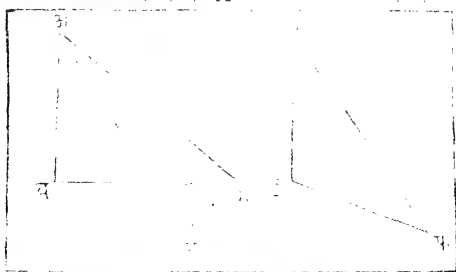
૧૮. ચતુષ્કોણના કોણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. અવક ત્રિકોણમાં વકતું મધ્યબિંદુ ઢ છે. જે અઢ < વઢ, તો < અ પહેલો ખુણો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જે એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહેલાની પરિમિતિ બીજાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

જે ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો જે ત્રિકોણમાંના ખુણા મોટા હોય, તે ત્રિકોણનો પાયો નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયો કરતાં મોટો હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ઢર્ફ એ બે ત્રિકોણમાં અવ=ઢર્ફ, અક=ઢફ, અને < અ > < ઢ >.

માધ્ય—વક > ફફ.

સિદ્ધતા—

∴ ઢઈ=અવ,

∴ ઢઈ, અવ પર પરાપર આવી રહેશે.

ઢઈફ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકો, કે ઢ અને ઈ બિંદુઓ અ અને વ પર પડે; અને અવની જે બાજુએ ફ શિરોબિંદુ છે તેજ બાજુએ ફ શિરોબિંદુ પડે. ધારો કે ફ, ગ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle વઅક $>$ \angle વઅગ, (પક્ષ)

∴ અગ (ઢફ), અવ અને અકની વચ્ચે પડે છે.

\angle વઅકમાંથી \angle વઅગ (\angle ઈઢફ) બાદ જતાં બાકી રહેલા \angle કઅગને દુભાગો, અને દુભાગનારી લીટીને હ બિંદુમાં ચક્રને મળવા દો. હગ સાંધો.

∴ અગહ અને અકહ ત્રિકોણોમાં—

અગ=અક, (પક્ષ)

અહ બંને ત્રિકોણમાં સામાન્ય છે,

અને \angle ગઅહ= \angle કઅહ, (રચના)

∴ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ હગ=હક.

આ દરેકમાં વહ ઉમેરો.

∴ વહ+હગ=વહ+હક (એટલે ચક્રની પરાપર.)

હવે વહગ ત્રિકોણમાં—

∴ વહ+હગ $>$ વગ, (પ્ર. ૧૮)

અને વહ+હગ=વક;

∴ વક $>$ વગ.

પણ વગ એટલે ઈફજ,

∴ વક $>$ ઈફ.

૧૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

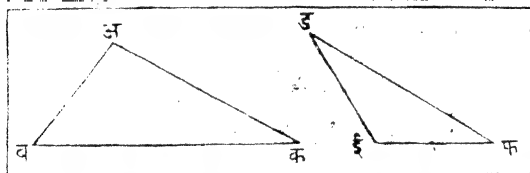
૧. અવકઢ એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં અઢ=અક, અને \angle અઢક $>$ \angle અકઢ; તો બાકી બાકો કે અક $>$ અઢ.

૨. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓને અનુક્રમે ડ અને ઈ સુધી વધારીને વડ=કઈ કરેલી છે. હવે જો અવ>અક હોય, તો બતાવો કે કડ>વઈ.

૩. અવક ત્રિકોણની વઅ અને કઅ બાજુઓને વધારીને વડ અને કઈ સરખી કરી છે. હવે જો અવ>અક હોય, તો બતાવી આપો કે વઈ>કડ.

પ્રમેય ૨૦.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો હોય તેના તે પાયાની સામેના ખુણા, જેનો પાયો નાનો છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અવ=ડઈ, અક=ડફ, અને વક>ઈફ.

સાધ્ય— $\angle A > \angle D$.

સિદ્ધતા—

જો $\angle A > \angle D$ ન હોય, તો $\angle A = \angle D$ હોવો જોઈએ, અથવા $\angle A < \angle D$ હોવો જોઈએ.

હવે $\angle A = \angle D$ હોય, તો

વક = ઈફ;

(પ્ર. ૧૦)

અને $\angle A < \angle D$ હોય, તો

વક < ઈફ.

(પ્ર. ૧૯)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,
એટલે \angle અ, \angle હની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો
પણ નથી.

$\therefore \angle$ અ $>$ \angle હ.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં અવ $>$ અક; વક, હમાં દુભાગેલી છે;
તો અહક સાંકડો ખુણો છે એમ બતાવી આપો.

૨. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું હ મધ્યબિંદુ છે. અહમાં
ગમે ત્યાં \angle ઈ બિંદુ લીધેલું છે; નો એમ બતાવો: કે જે અવ $>$ અક
હોય, તો \angle ઈવ $>$ \angle ઈક છે.

૩. અવક ત્રિકોણની વઅ, કઅ બાજુઓમાંથી વહ, કઈ સરખા
કરતા કાપી કાઢ્યા છે. હવે જે વઈ $>$ કહ હોય, તો અવ $>$ અક
છે એમ બતાવી આપો.

૪. અવકહ ચતુષ્કોણમાં અહ=વક. હવે એમ બતાવી આપો કે જે

(૧) અક $>$ વહ હોય, તો \angle અહક $>$ \angle વકહ;

(૨) અવ $<$ કહ હોય, તો \angle અકવ $<$ \angle હઅક;

(૩) \angle અહક $>$ \angle વકહ હોય, તો \angle અવક $>$ \angle વઅહ.

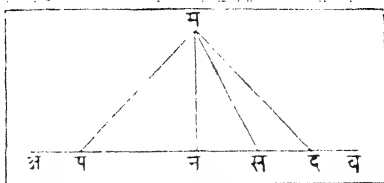
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી તે લીટી પર જે
લીટીઓ દારી શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી
હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટા ખુણા કરનારી લીટી, નાના
ખુણા કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર મ આપેલું બિંદુ છે.

(૧) મન, અવ ૫૨ લંબ છે; અને મપ, અવને પમાં મળનારી લીટી છે. (૨) \angle નમપ = \angle નમદ. (૩) \angle નમપ > \angle નમમ.

સાધ્ય—(૧) મન સૌથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

\therefore મપન ત્રિકોણની પન બાજુ થ સુધી વધારી છે,

$\therefore \angle$ મનથ > \angle મપન. (પ્ર. ૮, ઉ. સિ. ૩)

અને \angle મનથ = ૧ કાટખુણો (અને તેટલા માટે) =

\angle મનપ,

$\therefore \angle$ મનપ > \angle મપન.

\therefore મપ > મન.

(પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે મમાંથી અવ સુધી દોરેલી બીજી કોઈ પણ લીટી કરતાં મન નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાશે.

સાધ્ય—(૨) મપ = મદ.

સિદ્ધતા—

\therefore મપન, મદન ત્રિકોણોમાં—

$$\left. \begin{aligned} \angle \text{મનપ} &= \angle \text{મનદ}, \\ \angle \text{નમપ} &= \angle \text{નમદ}, \end{aligned} \right\}$$

(પક્ષ)

મન બાજુ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

\therefore મપ = મદ.

(પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) મપ > મસ.

સિદ્ધતા—

- \therefore મદસ ત્રિકોણની દસ બાજુ પ મુધી વધારી છે,
 $\therefore \angle \text{મસપ} > \angle \text{મદપ}$. (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)
 અને $\therefore \text{મપ} = \text{મદ}$,
 $\therefore \angle \text{મદપ} = \angle \text{મપદ} (= \angle \text{મપસ.})$ (પ્ર. ૧૨)
 $\therefore \angle \text{મસપ} > \angle \text{મપસ}$.
 $\therefore \text{મપ} > \text{મસ}$,

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે લીટી મુધી બેજ સરખી લીટીઓ દારી શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી મુધી જે લીટીઓ દારી શકાય તે પૈકી સૌથી નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

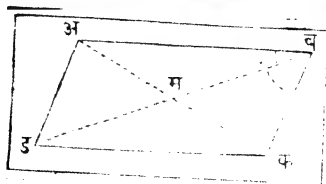
૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એક બાજુની સામેના ખુણા-એટલા અવયવો બીજા ત્રિકોણની ઝિમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણની સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.
૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપેલા સરખા ખુણા પહોળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

- (૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;
- (૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;
- (૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને
- (૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



૫૬-અવકઢ સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણુ છે. અક,વડ તેના કર્ણુ છે.

સાધ્ય—(૧) $\angle અ = \angle ક$, અને $\angle વ = \angle ઢ$;

(૨) અઢ=વક અને અવ=ઢક;

(૩) અક અને વઢ કર્ણો અવકઢ સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણુને દુભાગે છે;

(૪) અક અને વઢ કર્ણો એક ખીજને મમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

\therefore અઢ \parallel વક, અને તેમને વઢ મળે છે.

$\therefore \angle કવઢ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle અઢવ.$ (પ. ૬)

તેમજ \therefore અવ \parallel ઢક, અને ઢવ તેમને મળે છે.

$\therefore \angle અવઢ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle કઢવ.$ (પ. ૬)

$\therefore \angle અવઢ + \angle કવઢ = \angle કઢવ + \angle અઢવ.$

$\therefore \angle ઢ = \angle વ.$

એજ રીતે $\angle અ = \angle ક$ છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

\therefore અવઢ, કઢવ ત્રિકોણોમાં—

$\angle અઢવ = \angle કવઢ,$

$\angle અવઢ = \angle કઢવ,$

અને વઢ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;

$\therefore \triangle અવઢ \equiv \triangle કઢવ.$ (પ. ૧૧)

\therefore અઢ=વક, અને અવ=ઢક.

(૩)

$\therefore \triangle અવઢ \equiv \triangle કઢવ$, (કિપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore વઢ કર્ણુથી અવકઢ સમાંતરખાણુ ચતુષ્કોણુના બે સરખા ભાગ થયા છે. તેમજ $\triangle અઢક \equiv \triangle અવક$ એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

$\therefore \triangle મઅઢ$ અને $\triangle મકવમાં$ —

$\angle અઢમ = \angle કવમ,$

(પ. ૬)

\angle અમડ= \angle કમવ,

(૫. ૩)

અડ=વક;

$\therefore \triangle$ અમડ= \triangle વમક.

(૫. ૧૧)

\therefore મઅ=મક, અને મડ=મવ.

એટલે, અક અને વક કહો એક બીજાને મમાં દુભાવે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (લંબાંતર) બધે કેટલાં સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણા કાટખુણા હોય, તો બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની કોઈ પણ બે બાણુઓ સરખી હોય, તો સર્વ બાણુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાવનારી લીટીઓ એક બીજા સાથે કાટખુણા કરે છે.

૨. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાવનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કોણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામા બાણુ મુઘી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. અવકાઢ ચતુષ્કોણમાં વક=અડ છે, પણ તેઓ સમાંતર નથી; અને અવ ॥ ઢક છે; તો \angle ક= \angle હ એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપરના પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો \angle ઈ અને \angle ફ અનુક્રમે અવ અને કાઢનાં મધ્યબિંદુ હોય, તો \angle ઈફ, અવ પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણનો દરેક કોણ સામાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાણુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાણુઓ સરખી છે; તો તેમાંના કોઈ પણ ખુણા સામા ખુણાની બરાબર છે અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે તે કાટખુણુ ચતુષ્કોણુ હોય છે.

૯. જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, તેની સર્વ બાણુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઈને એક બીજા પર લંબ હોય, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. અવ પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાણુએ અવકાઢ, અર્થાત્ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ એવા દોર્યા, કે પહેલાની અડ બાણુ બીજાના અર્ધ કર્ણુ બરાબર છે, અને પહેલાનો અર્ધ કર્ણુ બીજાની અર્ધ બાણુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે:—

(૧) ક, અ, ફ બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
અને (૨) ડ, અ, ઈ બિંદુઓ }

૧૨. અવકાઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના અર્ધ કર્ણુમાં ઈ બિંદુ એવું લીધું છે, કે ઈવ=ઈડ છે; તો ઈ, અકનું મધ્યબિંદુ છે એમ બતાવી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. અવકા ટ્રિકોણની અર્ધ બાણુમાં ઈ અને ફ બે બિંદુઓ લો. અવમાં વ બિંદુ અને અવમાં ઢ બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, તો પદ લીટી ઈફની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય ?

૧૪. * સમઘ્રિબાણુ ટ્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુમાંથી સરખી બાણુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડામાંથી સામી બાણુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાણુ ટ્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણે બાણુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ટ્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાણુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૨૩.

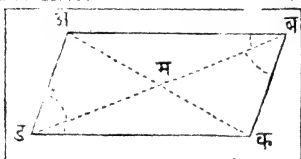
કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં બે—

(૧) સામસામી બાણુઓ પૈકી, એક બેડમાંની બે લીટીઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાબુઓની દરેક જોડમાંની બાબુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામી ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૪) કોઈ એક બીજને દુભાગતા હોય,
તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાહુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—અવકાશ ચતુષ્કોણમાં અબ, કક સરખી અને સમાંતર છે.

મધ્ય—અવકાશ સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—અ,ક સાંધો.

સિદ્ધતા—

હવે \therefore અબ \parallel કક,

(પક્ષ)

અને તેમને અક મળે છે,

$\therefore \angle$ અકબ = \angle કકઅ.

(પ. ૬)

હવે $\therefore \triangle$ અવક, અને \triangle કકઅમાં—

અબ = કક,

(પક્ષ)

અક સાધારણ છે,

\angle અકબ = \angle કકઅ;

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ. ૧૦)

$\therefore \angle$ અકઅ = \angle કકઅ.

અને \therefore આ બિંદુ સરખા હોય,

\therefore અક \parallel અહ.

(પ. ૪)

\therefore અવકાશ સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—અવ=કડ, અને વક=અડ.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \triangle$ અવક, \triangle કડઅમાં—

અવ=કડ, (પક્ષ)

વક=અડ, ”

અક સાધારણ છે;

 $\therefore \triangle$ અવક $\equiv \triangle$ કડઅ. (પ. ૧૪) $\therefore \angle$ વઅક $= \angle$ કઅ, અને \angle વકઅ $= \angle$ કઅડ. \therefore અવ \parallel કડ, અને વક \parallel અડ. (પ. ૪) \therefore અવકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩)

પક્ષ— \angle અ $= \angle$ ક, અને \angle વ $= \angle$ ડ.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \angle$ અ $= \angle$ ક, અને \angle વ $= \angle$ ડ, (પક્ષ) $\therefore \angle$ અ + \angle વ $= \angle$ ક + \angle ડ;એટલે \angle અ + \angle વ એ સરવાળો \angle અ + \angle વ + \angle ક + \angle ડનું અર્થ છે.અને \therefore અવકડ એક ચતુષ્કોણ છે, $\therefore \angle$ અ + \angle વ + \angle ક + \angle ડ $= ૪$ કાટખુણા.

(પ. ૮, ઉ. ૨)

 $\therefore \angle$ અ + \angle વ $= ૨$ કાટખુણા. \therefore અડ \parallel વક (પ. ૫)એન પ્રમાણે અવ \parallel કડ છે એમ બતાવી શકાશે. \therefore અવકડ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(૪)

પક્ષ—અક, હડ એક બીજાને મમાં હુભાગે છે.

સાધ્ય—અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

$\therefore \triangle અમહ અને \triangle કમવમાં-$

અમ = કમ, (પક્ષ)

હમ = વમ, "

$\angle અમહ = \angle કમવ;$ (પ્ર. ૩)

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

\therefore અહ=વક; અને

$\therefore \angle અહમ = \angle કવમ,$

\therefore અહ || વક. (પ્ર. ૪)

\therefore અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખા કિંચાઈના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. અવકહ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ, \angle વ, \angle હ$ અનુક્રમે $૬૦^\circ, ૧૨૦^\circ, ૧૨૦^\circ$ ના છે; તો $\angle ક$ કેવડો? અવકહ કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સાંધી લીટી બીજી બે બાણુઓને સમાંતર હોય છે.

૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કણોં સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણોં એક બીજા પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણોં તેના ખુણાઓને હુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કણોં સમાન હોઈને જો તે એક બીજાને કાટખુણુ હુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જો ચતુષ્કોણના કોર્ણો નાના મોટા હોઈને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાજુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કોર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે. (૨) સમબાજુ ચતુષ્કોણના કોર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કોર્ણો સરખા હોય છે, તે એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. અવકઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને અવકઠ બાજુઓ દ્વ અને ચ બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બતાવો કે વક્રકઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જો ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. અવકઠ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle બ$ અને $\angle ક = \angle ઢ$ છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓની એક જોડમાંની બાજુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાજુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

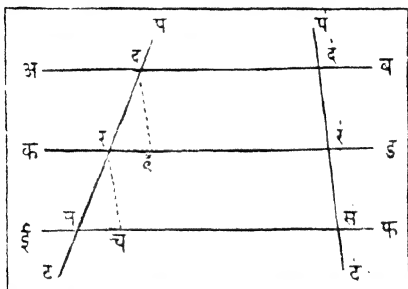
૧૩. અવકઠ એક ચતુષ્કોણ છે; વક્રકઠ, કઠઅદ, ઢઅવર, અને અવકસ, એ ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો અપ, વદ, કર, ઢસ સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૪. જો ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજાં શિરોબિંદુઓ સુધીનાં વ્યંજરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. અવકઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક મ બિંદુ છે. મઅઈવ, મવફક, મકગઢ, મઢહમ, આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોર્યાં હોય, તો ફફગહ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે અવકઠથી બમણો છે, એમ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પદ્ય—અવ, કઢ, ફફ સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને પટ સીધી લીટી અનુક્રમે દ, ર, સમાં છેદે છે; અને દર=રસ. બીજી કોઈ પણ પટ સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને દ, ર, સમાં છેદે છે.

આધ્ય—દર=રસ.

રચના—પરને સમાંતર દહ, રચ દોરો, અને ધારો કે જ કઢ, ફફને હ અને ચમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે :: કઢ || ફફ,

(પદ્ય)

:: \angle દરહ=સંગત \angle રસચ.

(પ્ર. ૭)

:: દહ, રચ બંને || પર,

:: દહ || રચ.

(પ્ર. ૭)

∴ દરસ તેમને છેડે છે,

∴ રદહ=સંગત / સરચ.

(પ. ૬)

∴ Δ દરહ અને Δ રસચમાં—

/દરહ=/રસચ,

/રદહ=/સરચ,

દર = રસ;

(પક્ષ)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

∴ દહ = રચ.

દહ || દર, અને દદ || હર,

∴ દહરદ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ રચસર પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ દહ=દર અને રચ=રસ.

(પ. ૨૨)

પણ દહ=રચ,

∴ દર=રસ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાજુના મધ્યબિંદુ-માંથી પાયાને સમાંતર લીટી દારી હોય, તો તે બીજી બાજુને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધી હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એકરૂપ હોય છે.

૨. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓમાં અનુક્રમે ૬ અને ૬ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અડ=૧/૬ અવ, અને અઈ=૧/૬ અક; તો અઈ,અકનો એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભાગાય છે.

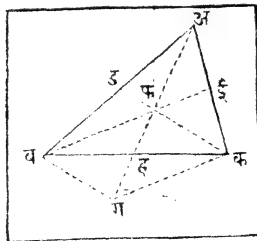
૬. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણુના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેના ખુણો જે કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરો-બિંદુ તરફનો ભાગ બીજા ભાગથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, અને તેની બંને અને કદ મધ્યગા એક ખીલને ફ બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) અહ મધ્યગા ફ બિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) અફ=૨ ફહ; વફ=૨ ફઈ; કફ=૨ ફહ.

સિદ્ધતા—

(૧) (અ, ફ બિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તે ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—અ, ફ સાંધો. અફ લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો ફગ ભાગ અફની બરાબર કરો. વગ અને કગ સાંધો.

∴ Δ અવગની અવ અને અગ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે હ અને ફ છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ હફ, વગને સમાંતર છે અને વગના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે અકગ ત્રિકોણની અગ અને અક બાજુઓનાં અનુક્રમે ફ અને હ મધ્યબિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ)

∴ ફઈ, ગકને સમાંતર છે અને ગકના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

હવે ∴ હક ॥ વગ,

અને બઈ ॥ ગક;

∴ વગકફ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને ∴ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક ખીલને દુભાગે છે;

∴ વક અને ફગનું હ મધ્યબિંદુ છે.

હવે ∴ હ, વકનું મધ્યબિંદુ છે,

∴ અફહ મધ્યગા છે, અને તે ફમાં થઈને જાય છે એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∴ ફહ = હગ,

∴ ફગ = ૨ ફહ.

પછી ફગ = અફ,

(૨૫ના)

∴ અફ = ૨ ફહ.

એજ પ્રમાણે વફ=૨ ફઈ, અને કફ = ૨ ફડ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

૨૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાણુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાણુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાના સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાંશ કરતાં વધારે હોય છે.



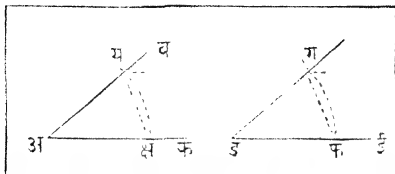
नवी भूमिति भाग १.

अं३ उ.

(कृत्यो.)

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—હાઈ આપેલી લીટી છે. હ આપેલું બિંદુ છે. વઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા \angle વઅક જેવડો \angle હાઈગ કરવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને, અબ અને અકને અનુક્રમે ય અને ક્ષમાં છેદવા દો. હ મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ કૌંસ દોરો. તે હાઈને અથવા હાઈના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે. એમ ધારો. ફ મધ્યબિંદુ લઈને ક્ષય (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને ફ કૌંસને ગમાં છેદવા દો. હગ સાંધો.

ફહગ માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(ફગ અને ક્ષય સાંધો.)

\therefore અક્ષય, હફગ ત્રિકોણોમાં—

અક્ષ=હફ,

અય=હગ,

ક્ષય=ફગ;

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

"

"

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ. ૧૪)

$\therefore \angle$ ફહગ એટલે \angle હાઈગ = \angle ક્ષઅય.

૧લા કૃત્ય પરના પક્ષ.

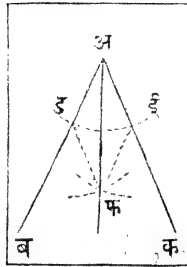
૧. આપેલા ત્રિકોણ જેવડો ત્રિકોણ દોરો.

૨. આપેલા ચતુષ્કોણ, પંચકોણ...જેવડી આકૃતિ દોરો.

૩. આપેલા કાટખુણુ ત્રિકોણના બે સમઘિયાણુ ત્રિકોણ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—વઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—વઅક ખુણો દુભાગવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, અવ અને અકને અનુક્રમે ઢ અને ફમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. ઢ અને ફ મધ્યબિંદુઓ લઈને ઢફ જેટલી ત્રિજ્યાએ ફમાં એક બિંદુને છેદનારા બે કૌંસો દોરો. અફ સાધો.

અફ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(ઢફ, ફફ સાધો.)

∴ અફફ અને અફઢ ત્રિકોણોમાં—

અફ = અઢ,

(એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

ફફ = ફઢ,

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અફ બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle અફફ \equiv \triangle અફઢ.

(પ્ર. ૧૪)

∴ \angle ઢઅફ = \angle ફઅફ.

રજા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

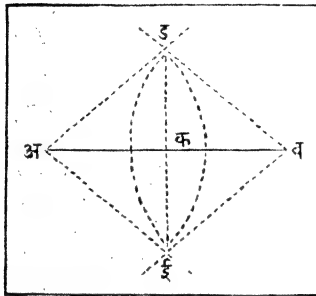
૧. આપેલા ખુણાના ૪, ૮...સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલા ખુણાના બે ભાગ એવા કરો, કે એક ખીજની ત્રણગણો થાય.

૩. અથવા ખુણાના અડધ, અથવા બે ભાગમાં ૬ અને ૬ બિંદુઓ એવાં લો, કે \angle અડધ = ૩ \angle અડધ થાય.

કૃત્ય ૩.

આપેલી લીટીને દુભાગવી.



પદ્ધતિ—અથવા આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—અથવાના બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના—અથવા મધ્યબિંદુઓ લઈને ૬ અથવા મોટી ત્રિજ્યાએ, ૬ અને ૬માં એક ખીજને છેદનારા બે કોંસો દોરો. અડધ, અડધ, અને સાધનારી લીટીને અથવાને કાપી છેદવા દો.

અથવા, ક બિંદુમાં દુભાગાશે.

સિદ્ધાન્ત—

(અડધ, અડધ, અડધ, અડધ સાધ્યો.)

∴ અડધ, અડધ ત્રિકોણોમાં—

અડધ = અડધ,

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અડધ = અડધ,

”

અડધ બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle અડધ \equiv \triangle અડધ.

(પ. ૧૪)

∴ \angle અડધ = \angle અડધ.

હવે \triangle અડક, \triangle વડકનાં—

અડ=વડ,

ડક બંનેમાં સાધારણ,

\angle અડક= \angle વડક;

$\therefore \triangle$ અડક $= \triangle$ વડક.

(પ. ૧૦)

\therefore અક=કવ.

૩જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં અક, હઈને કાટખુણે દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

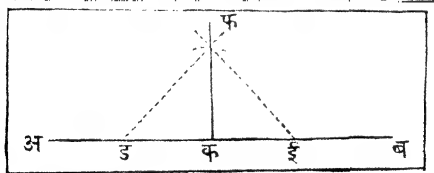
૨. આપેલી સીધી લીટીના ૪, ૮.....સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજાથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજાથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દારો.



પક્ષ—અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અબ પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં કથી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ હ અને ઈ બિંદુ લો. હ, ઈ મધ્યબિંદુઓ ધારીને કડથી

\therefore મહર્ફ સમપાશુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \angle$ હઅર્ફ $= ૧૦^\circ$. (પ. ૧૨, ઉ. સિ. ૨)

તેમજ \therefore અફ, \angle હઅર્ફને દુભાગે છે, (ક. ૩)

$\therefore \angle$ હઅફ $= ૩૦^\circ$.

પણ \triangle અકહ સમપાશુ છે,

$\therefore \angle$ કમહ $= ૧૦^\circ$.

$\therefore \angle$ અઅફ $= ૮૦^\circ$.

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.

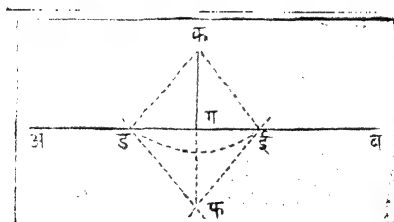
૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.

૩. ૨૨ $\frac{૧}{૨}$ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.

૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી જરાબર થાય, એવો ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પ્રશ્ન—અવ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અવ પર લંબ દોરવો.

રચના—ક મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને અવને હ અને હમાં હેઠનારો ઢોંસ દોરો. હ, હ મધ્યબિંદુઓ લઈને હર્ફ

જેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજાને કમાં છેદે એવા બે કોંસ દોરો.
કફ સાંધો. ધારો કે કફ, અચને ગમાં છેદે છે.

કગ, અથ પર લંચ થશે.

સિદ્ધતા—

(કઢ, કઈ, ફઢ, ફઈ સાંધો.)

∴ \triangle કઢફ અને \triangle કઈફમાં—

કઢ = કઈ,

ફઢ = ફઈ,

કફ બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle કઢફ \equiv \triangle કઈફ.

(પ્ર. ૧૪)

∴ \angle કઢફ = \angle કઈફ.

હવે \triangle કઢકગ અને \triangle કઈકગમાં—

∴ કઢ = કઈ,

કગ બંનેમાં સાધારણ,

\angle કઢકગ = \angle કઈકગ;

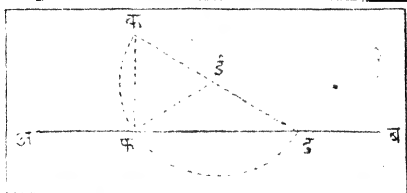
∴ \triangle કઢકગ \equiv \triangle કઈકગ;

(પ્ર. ૧૦)

∴ \angle કઢકગ = \angle કઈકગ.

∴ કગ, અથ પર લંચ છે.

બીજી રીત.



રચના—અચમાં (કની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે
તે ક બિંદુ લો. ક, ક સાંધો.

કઢને ફમાં દુભાગો.

ફ મધ્યબિંદુ અને ફઢ ત્રિજ્યા લઈને અચને કમાં છેદનારો
કોંસ દોરો. કફ સાંધો.

કફ, અવ પર લેખ થશે.

સિદ્ધતા—

(ઈ, ફ સાધો.)

$$\therefore \triangle કઈફમાં કઈ=ફઈ,$$

$$\therefore \angle કફઈ = \angle ફકઈ.$$

(પ. ૧૨)

તેજ પ્રમાણે $\therefore \triangle ફફઙમાં ફફ=ફઙ,$

$$\therefore \angle ફફઙ = \angle ફઙફ;$$

(પ. ૧૨)

$$\therefore \angle કફઈ + \angle ફફઙ = \angle ફકઈ + \angle ફઙફ.$$

$$\text{પણ } \angle કફઈ + \angle ફફઙ = \angle કફઙ,$$

$$\therefore \angle કફઙ = \angle ફકઈ + \angle ફઙફ.$$

$$\therefore \angle કફઙ = ૧ (\angle કફઙ + \angle ફકઈ + \angle ફઙફ).$$

$$\text{પણ } \therefore \angle કફઙ + \angle ફકઈ + \angle ફઙફ = ૨ કાટખુણા,$$

(પ. ૮)

$$\therefore \angle કફઙ = ૧ કાટખુણા.$$

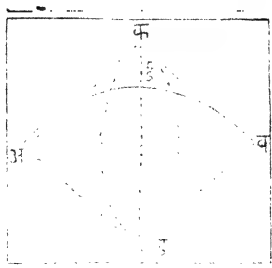
\therefore કફ, અવ પર લેખ છે.

પમા કૃત્ય પરનો પ્રશ્ન.

અવક, ગમે તેવો ત્રિકોણ દોરો. દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી આળુ પર લેખ દોરો. આ લેખો એકબી બિંદુમાં મળે છે એ જોઈ સો.

કૃત્ય ૬.

આપેલો ટ્રાંસ દર્શાવો.



પક્ષ—અવ આપેલો ટ્રાંસ છે.

સાધ્ય—અવને દર્શાવો.

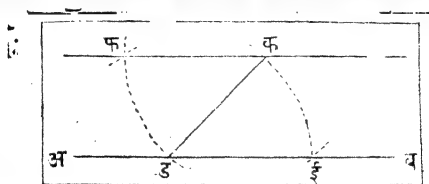
રચના—અ મધ્યખિંદુ અને અવના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને જ મધ્યખિંદુ લઈને પહેલા કૌંસને ક અને ઢમાં છેદે એવો ખીજો કૌંસ દોરો. કઢ સાંધો.

કઢ, અવ કૌંસને ફમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિના ખીજા ભાગ-માંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, માટે તે વિદ્યાર્થીજોને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.

કૃત્ય ૭.

આપેલા ખિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું ખિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અવને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—અવમાં એક ગમે તે ઢ ખિંદુ લો. ઢક સાંધો. કઢવથી વિરુદ્ધ બાજુએ ઢક સાથે કઢવ જેવડો ખુણો કરનારી કફ લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

∴ કફ અને અવ લીટીઓને કઢ લીટી મળે છે,

અને \angle ફકઢ = \angle કઢવ;

∴ કફ ॥ અવ.

(રચના)

(પ્ર. ૪)

ઉપલી રચનામાં \angle ઘઢક જેવડો. \angle ઢકગ, ઢકની તેજ બાજુએ (એટલે ઢકની જે બાજુએ \angle ઘઢક છે તેજ બાજુએ, એટલે જમણી બાજુએ) કર્યો હોય તો ચાલે કે ? કેમ નહિ ? તેજ બાજુ પર ખુણો કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણો કેવડો

કરવો? તેજ બાજુ પર \angle વઢક જેવડો ખુણો કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો હું ખિંદુ ક્યાં લેવું?

ઉમા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આખ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધાં હોય, એવો એક લંબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો 60° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો.

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આખ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અતુલ્ય ૫, ૨, ૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

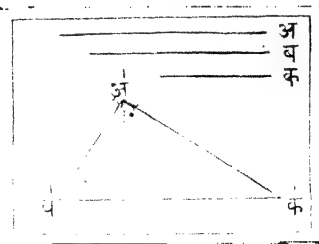
૬. જેની એક બાજુ ૨.૫" અને કર્ણ ૪" હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

૭. આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આખ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી એવી છે, કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણની બાજુઓ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—અ, વ, ક, એવી ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પૈકી કોઈ પણ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—અ, વ, ક, જેટલી જેની જાણુઓ હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવો.

રચના—અ જેટલી અ લીટી દોરો. વ અને ક મધ્યબિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે ક અને વ જેટલી ત્રિજ્યાએ બે દોરો દોરો. તેમને એક બીજાને અમાં છેદવા દો, અવ, અક સાધો.

અવક ભાગેલો ત્રિકોણ છે.

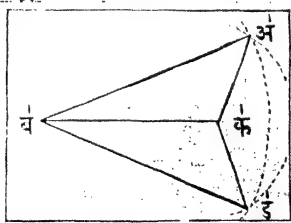
સિદ્ધતા—અક = અ,

કવ = વ,

અવ = ક.

∴ અવક ત્રિકોણની જાણુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની જાણુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું ?



ધારો કે અ, વ, ક, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પૈકી અ પાચો છે.

અ જેટલી અ લીટી દોરો. ધારો કે કમાંથી વ જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (કથી વ અંતરે હોય

એવાં સર્વ બિંદુઓનો ભાગ) આપણે શી રીતે દોરી શકીએ ? “**ક** મધ્યબિંદુ અને **ચ** જેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.” આ વર્તુળની સર્વ ત્રિજ્યાઓ **ચ** જેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય **ક** માંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ **ચ** થી ઓછી કે વધારે થશે. હવે, **ચ** માંથી **ક** જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે ? “**ચ** મધ્યબિંદુ અને **ક** ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ.” આ વર્તુળો એક બીજાને ક્યાં છેદે છે ? “**અ** અને **હ** બિંદુઓમાં.” આ બિંદુઓમાંથી **ચ** અને **ક** સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ? “આ બિંદુઓ સિવાય તમે બીજાં એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશો, કે જેમાંથી **ચ**, **ક** સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે **ક** અને **ચ** લંબાઈની થાય ? “ના.”

અ, **ચ**, **ક** જેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો દક્ષા એકજ ત્રિકોણ જ્યારે **ચ** અને **ક**ની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો **ચ** અને **ક** ત્રિકોણ **ચ** પાયા પર, **હ** છેડો ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂક્યો હોય, તો **હ** બિંદુ ક્યાં પડશે ? “**અ** પર.” શા માટે ? “તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે.”

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે **અ**, **ચ**, **ક**ની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ **ચ** અને **ક** પર મૂક્યો હોય, તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ **અ** પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં શો નિયમ નીકળે છે ? “તે એકરૂપ હોય છે.”

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.
૨. જેની સરખી બાજુઓમાંની એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.
૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.

૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય એવો સમઢિબાળુ ત્રિકોણુ દોરો.

૫. આપેલા પાયા પર એક સમબાળુ ત્રિકોણુ દોરો.

૬. * કાટખુણાના ત્રણુ સરખા ભાગ કરો.

૭. જેની દરેક બાળુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમબાળુ ચતુષ્કોણુ કાઢો.

૮. આપેલા પાયા પર નિયમિત પટ્કોણુ કાઢો.

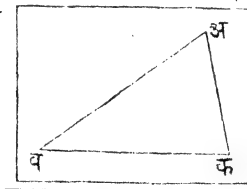
૯. એક ત્રિકોણુની (પાયા સિવાયની) બે બાળુઓ અને ઉંચાઈ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણુ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણુનો પાયો, એક બાળુ, અને સામા શિરોબિંદુ-માંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા, એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણુ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણુનો પાયો, ઉંચાઈ, અને એક બાળુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણુ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણુના બે કર્ણો અને એક બાળુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણુ દોરો.

સૂચના—



ત્રિકોણુના ખુણા અને બાળુઓ દર્શાવવા માટે નીચેના સંકેત નક્કી થએલો છે. અવક ત્રિકોણુમાં—

∠અ એટલે અવક ખુણો,

∠વ એટલે અવક ખુણો,

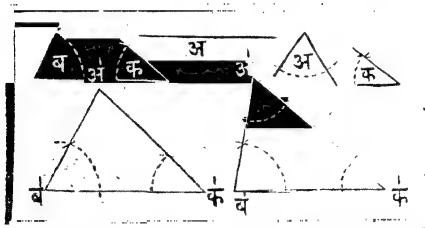
∠ક એટલે અવક ખુણો;

તેમજ,

અ બાળુ એટલે \angle અની સામેની (=બક) બાળુ;
 બ બાળુ એટલે \angle બની સામેની (=અક) બાળુ;
 ક બાળુ એટલે \angle કની સામેની (=અવ) બાળુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાળુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દારવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈ પણ બે ખુણા એક બાળુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાળુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાળુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાળુને અડકીને રહેલા બન્ને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાળુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાળુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧લો પ્રકાર—અ આપેલી બાળુ છે. \angle બ અને \angle ક, આ અ બાળુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨જો પ્રકાર—અ આપેલી બાળુ. \angle અ=અ બાળુની સામેનો ખુણો, અને \angle ક=અ બાળુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) રચના—અ લંબાઈની એક રાંધા લીટી દોરો. બ' છોડા આગળ ક'બ'એ \angle બ જેવો ખુણો કરો. ક' છોડા આગળ રાંધા'એ \angle ક જેવો ખુણો કરો.

રાંધા'ક આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૨) રચના— \angle અ અને \angle કનો સરવાળો કરીને તે બે કાટખુણામાંથી બાદ કરો. બાદબાકી આવે તે ત્રિકોણનો બાકી રહેશે ત્રીજો ખુણો છે, એટલે કે અને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (બ) ખુણો છે. આ ખુણો બાકી પછી પહેલા પ્રકારમાં કલા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકોણ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore \angle ક = અ,

$$\angle$$
ક \angle અ = \angle બ,

$$\angle$$
અ \angle ક = \angle ક;

$\therefore \triangle$ અબકની એક બાજુ અને બે ખુણા, આપેલી બાજુ અને બે ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.



અ બાજુ દોર્યા પછી અની અમુક બાજુએ \angle બ દોરવો જોઈએ, અને અમુક બાજુએ \angle ક દોરવો જોઈએ એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દોર્યા હોય તોપણ તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ બને છે. આ વાત ત્રિકોણ એક પર એક મૂક્યા હોય તો ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણ સ્પષ્ટ થાય છે, કે બે ત્રિકોણના બધા ખુણા અને એકેક બાજુ સરખા હોય તો ત્રિકોણ એકરૂપજ હોય છે.

૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનો ખુણો આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજાથી બમણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. સમઘિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ આપેલો છે તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૫. એક ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ આપેલી છે, તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

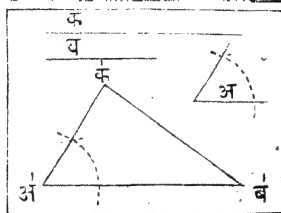
૭. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેના ખુણા એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેના ખુણા પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો ૨.૪" હોય એવો સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—વ અને ક એ આપેલી બાજુઓ છે. અ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા \angle અ નેવડો વઅક ખુણો કાઢો. વઅક ખુણાની અવ અને અક એ બાજુઓ આપેલી ક અને વ બાજુની બરાબર કરો.

અવક આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

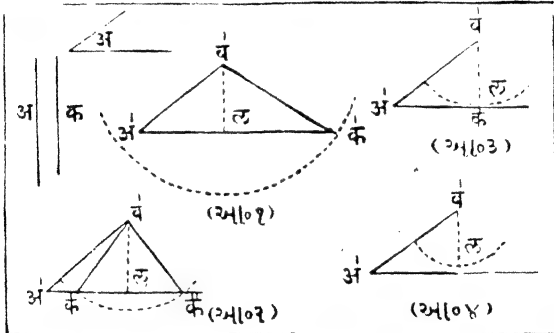
૨. જેનો એક ખુણો 60° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ ૪" લાંબો હોય, એવો સમબાજી ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુ કેટલી લાંબી છે ?

૩. જેની મધ્યગા ૧.૨" હોય એવો સમબાજી ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસ ક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવવું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ માત્ર એટલા માટે જ કરતા આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેના ખુણા એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—અ અને ક આપેલી બાજુઓ છે, અને \angle અ આપેલો ખુણો છે.

રચના— \angle અ જેવડો અંક 'ક' ખુણો કરો. ક જેટલી લાંબી અંક બાજુ રાખો. 'લ' મધ્યબિંદુ ધારીને અ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. (ધારો કે લ = અમાંથી અંક પર દોરેલો લંબ છે.)

અંક અને લ સાથે સરખાવતાં અ (=અંક)ની લંબાઈ ઓછી-વતી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) ક (=અંક) કરતાં અ (=અંક) વધારે લાંબી હોય, તો અ બિંદુ પરિધની અંદર રહે છે, અને અંક એવો એક જ ત્રિકોણ બને છે. (આકૃતિ ૧ જુઓ.)

(૨) **ઘ**ક, **ઘ**અ કરતાં નાની, પણ **લ** કરતાં મોટી હોય, તે **ઝ** છેડો પરિધની બહાર રહેશે, અને પરિધ **ઝ**ક લીટીને **ક** અને **ક** એ બે ઠેકાણે છેદશે.

એવી રીતે **ઝ**ક અને **ઘ**ક એવા બે માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જવાબ આવે છે, તેથી આ સંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

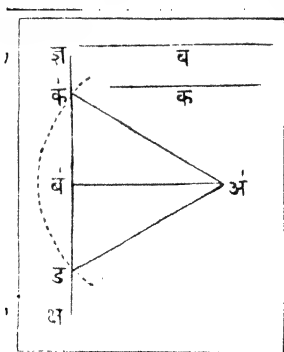
(૩) જો **ઘ**ક, **લ** બરાબર હોય, તે વર્તુળ **ઝ**ક લીટીને ફક્ત એકજ ઠેકાણે સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો **ઘ**ક, **લ**થી નાની હોય, તે વર્તુળ **ઝ**ક લીટીને બીજા-કુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીજાકુલ બની શકશેજ નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણ ત્રિકોણનો કોણ ૨ ને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—બ કર્ણ છે, ક બાજુ છે.

રચના—ક બેટલી એક બંધ લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી ક્ષબંજ અમર્યાદ લીટી દોરો. ઍ મધ્યબિંદુ અને બ ત્રિજ્યા લઈને ક્ષબંજ લીટીને ક અને હમાં છેદે એવો કોંસ દોરો. અક અને અહ સાધો.

અબક અને અબહ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(૨૫૭ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને કાટખુણના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલો લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮થી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

- (૧) \angle બ=૩૦°, બ=૨", ક=૪".
- (૨) \angle બ=૧૩૫°, ક=૩", બ=૭".
- (૩) \angle બ=૪૫°, ક=૩", બ=૭".
- (૪) અ=૪", \angle બ=૨૭°, \angle ક=૬૮°.
- (૫) અ=૫", \angle અ=૨૭°, \angle ક=૧૯°.
- (૬) બ=૩", \angle ક=૯૯°, \angle બ=૮૮°.

૨. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉચાઈ આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેનો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

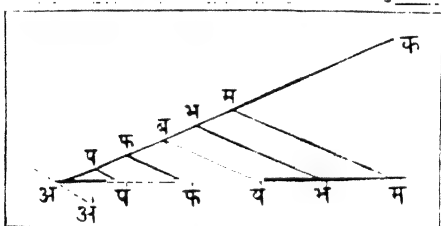
૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈનો અને એક બાજુનો સરવાળો તથા પાયો એ બે આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની દિશા અને ત્રણ બાજુ પૈકી દરેક બાજુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૭. ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—અમ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—અમની સાથે સાંકડો ખુણો કરનારી ગમે તે અક અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેડાં એક બીજાથી જરા આધા રાખીને અથી શરૂ કરીને અક લીટીના અપ, પફ, ફવ, વમ, મમ, એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. મમ સાંધો. મ,વ ફ,પ બિંદુઓમાંથી મમને સમાંતર અને અમને છેદનારી મમ, વવ, ફફ, પપ લીટીઓ દોરો.

અપ, પફ, ફવ, વમ, મમ, આ માગેલા ભાગ છે.

અમાં થઈને પવને સમાંતર અવ દોરો.

સિદ્ધતા-: અઞ્, પપ્, ફફ્, બબ્, મમ્, મમ્, આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી અક લીટીના અપ, પપ્.....આ ગાળાઓ સરખા છે.

∴ અમ્ લીટીના અપ, પપ્...આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.
૨. આપેલી લીટીના $\frac{૨}{૭}$ ભાગ કાપી કાઢો.
૩. આપેલી લીટીના $\frac{૨}{૫}$ ભાગ કાપી કાઢો.
૪. આપેલી અબ લીટીના ક બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો, કે $\frac{\text{અક}}{\text{કબ}} = \frac{૩}{૫}$.

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં $\frac{\text{ફફ્}}{\text{પપ્}} = ૨$, અને $\frac{\text{મમ્}}{\text{પપ્}} = ૪$ છે એમ સિદ્ધ કરો,

પરિશિષ્ટ અ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના અ,બક,ક,અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો અ અને બ મળીને ક અને કના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમઢિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. અબકકઢઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં અક, અક સાંધો. બક, કઢઈને લંબાવીને ફમાં મળવા દો. ફકક અને અકક ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમઢિબાણુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટખુણે છેદતી નથી.

૬. અવ, કઢ સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે ૫ એક બિંદુ છે; તો \angle વપઢ = \angle અવપ + \angle કઢપ એમ બતાવી આપો.

૧૭. * સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાળુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંનો દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી ચક્રને ઢમાં મળે છે, અને ચક્રને ૬ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવક + \angle અકઈ = ૨ \angle અઢક એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની અવ, અક, બાળુઓ અનુક્રમે ઢ અને ૬માં દુભાગેલી છે; અને વઈ, કઢ અનુક્રમે ૫ અને ૮ સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે ૬ફ = વઈ, અને ઢગ = કઢ થાય છે; તો ૫અગ એક સીધી લીટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૦. * સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો, પાંચો વધારવાથી થતા બહારના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ઢમાં મળે છે; તો \angle વઢક = $180^\circ + ૬$ અ છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ચક્રની એકબ બાળુએ અવક એક સમબાળુ અને ઢવક એક સમઘ્રિયાળુ એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને \angle વઢક = ૬ \angle વઅક છે; તો અઢ = વક છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. અવક ત્રિકોણની ચક્ર, કઅ, અવ બાળુઓમાં ક્ષ, ય, જ્ઞ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle ચઅક્ષ = \angle કવય = \angle અકજ્ઞ; તો બતાવી આપો કે અક્ષ, વય, કજ્ઞ, આ એક બિંદુમાં યર્ધને ન જતી હોય, તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને અવક ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. અવકઢ કાટખુણ ચતુષ્કોણની એક નાની (અવ) બાળુમાં એક ૫ બિંદુ છે; તો એવો એક સમબાળુ ચતુષ્કોણ કાઢો, કે તેનું એક શિરોબિંદુ ૫ થાય, અને બાકી રહેલાં શિરોબિંદુઓ કાટખુણ ચતુષ્કોણની બાકીની બાળુઓ ઉપર પડે.

૧૫. અવક ત્રિકોણની ત્રણ પાણુ ડ સુધી વધારી છે. કઈ, \angle અકબને દુભાગે છે અને અવ : ફમાં મળે છે. ફમાં થઈને ચકને સમાંતર લીટી દોરી, તે અકને કમાં અને અકકને દુભાગનારી લીટીને ગમાં મળે છે; તો ફક = કગ છે એમ ખતાવી આપો.

૧૬. અવક સમપાણુ ત્રિકોણની અવ, અવક, કઅ પાણુઓમાં અનુક્રમે પ, દ, ર બિંદુઓ એવા લીધા છે, કે અપ = વદ = કર છે; તો \triangle પદર સમપાણુ છે એમ ખતાવી આપો.

૧૭. એક વર્તુળના અઅવ : કક વ્યાસ છે; \triangle અવક $\equiv \triangle$ અવક છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૮. અવક ત્રિકોણની અવ અવક પાણુઓ પર ત્રિકોણની બહાર અવકગ, અવકઈક ચોરસ દોરેલા છે; તો \triangle અવક $\equiv \triangle$ અવક એમ ખતાવી આપો.

૧૯. અવક ત્રિકોણની ત્રણ પાણુ પર ત્રિકોણની બહાર અવક, કઅઈ, અવક એ સમપાણુ ત્રિકોણો કાઢેલા છે; તો અક = અઈ = કક એમ ખતાવી આપો.

૨૦. ક્ષયમાંના મ બિંદુથી ક્ષયની બંને પાણુએ મપ, મદ, આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle ચમપ = \angle ચમદ છે; તો \triangle પક્ષય = \triangle દક્ષય છે એમ ખતાવી આપો.

૨૧. અવકક ચોરસ છે. તેની એક પાણુમાંથી અઈ, અવ, કગ, કહ આ સરખા કકકા કાપી કાઢેલા છે; તો ફ, ક, ગ, હ આ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨૨. અવક ત્રિકોણની અવ, અક પાણુઓ સરખી છે. અવક ત્રિકોણની બહાર અવ, અક પર અકઅ, અઈક સમપાણુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. અઈ, કક એક પાણુને મમાં છેદે છે; તો ખતાવી આપો કે મક = મઈ.

૨૩. અવકકઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. અ, અ પાણુઓને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મક, મક, મઈ અનુક્રમે ક, ક, ફ પાણુને દુભાગે છે, અને મ બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ ખતાવી આપો.

૨૪. અવક સમયાણુ ત્રિકોણ છે. વકને વધારીને તેમાં દ્વિંદુ લીધું છે; તે તે વ કરતાં અની વધારે પાસે છે એમ બતાવેા.

૨૫. ક્ષયજ્ઞ કાટખુણુ ત્રિકોણમાં ક્ષય=ક્ષજ્ઞ છે. \angle યને દુભાગનારી ચર લીટી ક્ષજ્ઞને રમાં મળે છે. હવે જે યજ્ઞ પર રન લંબ દોર્યો હોય, તે રન=ક્ષર છે એમ બતાવેા.

૨૬. અવક લીટીમાંના વ િંદુમાંથી વડ,વર્ડ જે સરખી લીટીઓ એવી દોરી છે, કે વર્ડ કાટખુણો થયો છે. અક પર ઢફ, ર્ડહ લંબો દોરેલા છે; તે ઢફ=વહ છે એમ બતાવેા.

૨૭. જે સમદ્વિયાણુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવેા.

૨૮. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાણુઓ બરાબર છે. અવમાં ઢ િંદુ લેા. કાને ર્ડ સુધી વધારો, અને અર્ડને અડ બરાબર કરો. હવે ર્ડને વધારી હોય તે તે વકને કાટખુણુ છે છે એમ બતાવી આપેા.

૨૯. જેનું મધ્યિંદુ મ છે એવા એક વર્તુળની અવ બ્યા ક સુધી વધારી છે; અને વક, અમની બરાબર કરી છે. કમ લીટી વર્તુળને ઢમાં છે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને ર્ડમાં છે છે; તે \angle અમર્ડ, \angle વમર્ડથી ત્રણગણુ છે એમ બતાવી આપેા.

૩૦. એક વર્તુળના અવ અને કડ ગમે તે બે વ્યાસ છે. વ િંદુમાંથી એક લીટી કડને સમાંતર દોરી છે. આ લીટી અવની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે કવ, ઢવ લીટીઓથી દુભગાય છે એમ બતાવી આપેા.

૩૧. * અવક ત્રિકોણના વ અને ક એ સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી બાણુઓને અનુક્રમે ર્ડ અને ફમાં મળે છે; તે ર્ડફ, વકને સમાંતર છે એમ બતાવી આપેા.

૩૨. અવકડ ચતુષ્કોણમાં અવ=કડ, અને \angle વ= \angle ક; તે વકને અડ સમાંતર છે એમ બતાવી આપેા.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના અવકડ ચતુષ્કોણના કર્ણ સરખા છે એ બતાવી આપેા.

૩૪. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle ઘ$, અને $\angle ક = \angle ઢ$; તો અઢ=ઘક છે એ બતાવો.

૩૫. * અવક ત્રિકોણમાં અઘ=અક. ઘક પર દોરેલો લંબ અઘ અને અક બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને ઢમાં અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે; તો $\triangle અઢફ$ સમઘિબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૩૬. પદ્મ સમઘિબાજુ ત્રિકોણની પદ્મ પર સરખી બાજુઓમાં પથી સરખે અંતરે ક્ષ અને ય બિંદુઓ લીધાં છે. દય, રક્ષ એક બીજીને જમાં છેદે છે; તો જદર, જક્ષય સમઘિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૩૭. અવક ત્રિકોણની ઘક બાજુમાં (જરૂર લાગે તો વધારીને) ઢ બિંદુ એવું લીધું છે, કે ઘઅઢ અને અઘઢ ખુણા સરખા થયા છે. અઢઘ ખુણાને દુભાગનારી લીટી અકને (અથવા તેના વધારેલા ભાગને) ફમાં મળે છે; તો $\angle અઘફ = \angle ઘઅફ$ છે એમ બતાવો.

૩૮. અવક સમબાજુ ત્રિકોણના ઘ અને ક ખુણા અનુક્રમે ઘઢ અને કઢથી દુભાગાયા છે. અઘને સમાંતર ઢફ દોરેલી છે, અને તે ઘકને ફમાં મળે છે. અકને સમાંતર ઢફ દોરેલી છે, અને તે ઘકને ફમાં મળે છે; તો ઘફ, ફફ, ફક સરખી છે એમ બતાવો.

૩૯. અવક સમઘિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. તેનો અઘ કર્ણ છે. અઢ એ $\angle ઘઅક$ ને દુભાગનારી અને ઘકને ઢમાં મળનારી લીટી છે; તો અક+કઢ=અઘ એ બતાવી આપો.

૪૦. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ બીજા બેમાંની નાની બાજુથી બમણો હોય છે.

૪૧. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ચતુષ્કોણની ચારે બાજુની બરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો બીજાના તેને મળતા આવતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

૪૨. ઘક પાયાની બંને બાજુએ અવક અને ઢઘક એકરૂપ ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક બીજીને મળતી આવતી બાજુઓ પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો ઘક, અઢને કાટખુણુ દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. અવક અને ઢવક એ બે ત્રિકોણો વક પાયાની એકજ બાજુએ છે. જો અવ=ઢક અને અક=ઢવ હોય, તો અઢ,વકને સમાંતર છે એમ બતાવો.

૪૪. * કાટખુણ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક છે. અવમાં ગમે ત્યાં ફેરવેલું લઈને તેને વકના મધ્યબિંદુ ઢની સાથે સાંધ્યું છે; તો અક અને અફની બાદબાકી ઢફ અને ઢવની બાદબાકી કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪૬. અવકઢફ પટ્ટકોણ છે; તો તેની પરિમિતિ અકફ ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવો.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવો.

૪૮. અવક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણમાં ઢ એક બિંદુ છે; તો ઢઅ, ઢવ, ઢક લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવો.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી હંમેશા મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય છે એમ બતાવો.

૫૧. અવક ત્રિકોણમાં અ સૌથી મોટો ખુણો છે; તો એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ અવ, અક, અને રવક બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. અવક ત્રિકોણના વ અને ક સાંકડા ખુણા છે; અને \angle ક $>$ \angle વ છે. વકમાં પ એક બિંદુ છે; તો અવથી અપ નાની છે એમ બતાવો. અકથી અપ નાની હોવા માટે પ ક્યાં હોવું જોઈએ ?

૫૩. વર્તુળમાંના ક બિંદુમાં થઈને અવ બાસ જાય છે, અને અકમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કચ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કચ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કચ આ બે ગમે તે લીટીઓ પરિધ સુધી દોરેલી હોય, અને જો \angle કમક્ષ \rangle \angle કમચ હોય, તો કક્ષ \rangle કચ; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો અક્ષ વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના ક બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કચ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કચ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કચ પરિધ સુધી દોરેલી છે, અને \angle ક્ષમક \rangle \angle ચમક છે; તો કક્ષ \rangle કચ; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. અબક સમઘાળુ ત્રિકોણમાં મ એક બિંદુ છે. જો \angle મઅબ \rangle \angle મઅક હોય, તો \angle મકબ \rangle \angle મચક છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમઘાળુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કઈ આકૃતિ થાય છે?

૫૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અંદરના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી જે ઠાટખુણુ ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કર્ણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અક કર્ણમાં પ અને દ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ=કદ છે; તો બપડદ સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી આપો.

૫૯. અવની એકજ બાજુએ અવકઢ અને અવક્ષય આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોરેલા છે; તો બતાવો કે કઢયક્ષ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો અક ધર્ણુ \bar{I} સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે $\bar{K}\bar{I} = \bar{K}\bar{A}$ થાય છે. \bar{I} માંથી કબને સમાંતર $\bar{I}\bar{F}$ દોરેલી છે, અને તે વધારેલી ઢક લીટીને \bar{F} માં મળે છે; તો અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૧. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની અવ, વક, કઢ, ઢઅ બાજુઓમાં અનુક્રમે \bar{I} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે $\bar{A}\bar{H} = \bar{K}\bar{F}$ અને $\bar{A}\bar{I} = \bar{K}\bar{G}$; તો $\bar{I}\bar{F}\bar{G}\bar{H}$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૨. * અવ લીટીનું \bar{K} મધ્યબિંદુ છે. અ,વ,કથી અનુક્રમે અક્ષ, વચ, કજ લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો અ અને વ આપેલી લીટીની એકજ બાજુએ હોય, તો એમ બતાવો કે $\text{અક્ષ} + \text{વચ} = ૨\text{કજ}$ છે.

૬૩. * ઉપલા પ્રશ્નમાં અ અને વ જો આપેલી લીટીની સામ-સામી દિશાએ હોય, તો $\text{અક્ષ} - \text{વચ} = ૨\text{કજ}$ છે એમ બતાવો.

૬૪. અવક ત્રિકોણમાં અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને વકને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને ઢ બિંદુમાં છેદે છે; અને ઢમાંથી અવ અને અક પર (જરૂર હોય તો એ બાજુઓને વધારીને) ઢક્ષ, ઢચ લંબો દોરેલા છે; તો $\text{અક્ષ} = \text{અચ}$ અને $\text{વક્ષ} = \text{વચ}$ એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. અવક એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે, અને અવમાં ઢ એક ગમે તે બિંદુ છે. અઢ પર કથી વિરુદ્ધ બાજુએ અઢઈ સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો $\bar{K}\bar{I} = \bar{K}\bar{H}$ છે એમ બતાવો.

૬૬. અવક ત્રિકોણમાં વમાંથી અકને મળનારી અને કમાંથી અવને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજાને દુભાગી શકતી નથી એમ બતાવો.

૬૭. વક પાયા પર અવક અને ઢવક ત્રિકોણો છે, અને અડ ॥ વક છે. હવે અવક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ ઢવક ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછી છે એમ બતાવો.

૬૮. અવકડ ચોરસ છે. અમાંથી વક અને કઢનાં મધ્ય-બિંદુઓ સુધી, અને કમાંથી ઢઅ અને અવનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃત સમબાજી ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૯. અવક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પાયા સુધી અડ, અઈ લીટીઓ એવી દોરી છે, કે \angle વઅડ = \angle ક અને \angle કઅઈ = \angle વ થાય છે; તો અમાંથી વક પર દોરેલો લંબ ઢઈને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. અવક ત્રિકોણની અવ બાજુના ઢ મધ્યબિંદુમાંથી વકને સમાંતર ઢઈ દોરેલી છે, અને અવક ખુણાને વઈ દુભાગે છે; તો \angle અઈવ કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. અવક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો અ અર્ધો કાટખુણો છે, અને અ અને વમથી સામી બાજુ પર દોરેલા અડ અને વઈ લંબો વમાં મળે છે, તો વઈ=ઈક છે એમ બતાવો.

૭૨. અડ લીટી અવક ત્રિકોણના અ આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અડ પર દોરેલો લંબ અડને નમાં મળે છે. વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો મન=૧ (અવ+અક) છે એમ બતાવો.

૭૩. અવકડ ચતુષ્કોણની અવ, ઢક બાજુઓની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય, એવો એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની અડ, કવની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪. અવક ત્રિકોણના બહારના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં વ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અવ+અક < વવ=વક.

૭૫. અવક ઢઈવગહ નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં અવ, વઈ, કહ, ઢગ લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો.

૭૬. અડ લીટી અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગે છે. ક-માંથી અડ પર કાઢેલો લંબ અડને નમાં મળે છે, અને વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે મન=૧ (અવ-અક).

૭૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓમાં અનુક્રમે ડ, ફિંદુઓ લીધાં છે; અને વઈ, કડ લીટીઓ ફમાં મળે છે; તેા $ડઅ+અઈ > ફફ+ફડ$ એમ બતાવેા.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસપાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તેા બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક. વકમાં ડ ગમે તે એક બિંદુ છે. વડ, ડકનાં મધ્યબિંદુઓમધ્યી વક પર દોરેલા લંબો વઅ, અકને અનુક્રમે હ અને ચમાં મળે છે; તેા સિદ્ધ કરો કે હવ=અચ અને અહ=કચ છે.

૮૦. એક લીટીમાં અ,વ,ક બિંદુઓ હારબંધ એવાં લીધાં છે કે અવ=૩ વક. વ મધ્યબિંદુ ધારી ૧ અવ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દાટ્યું છે. તેના પરિધ પર પ એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને અ,પ બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને પદ=અપ કરી છે. હવે દવ, દક સાધો અને \angle વદક દાટખુણો છે એમ બતાવેા.

૮૧. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ડ અને અડનું ફ, મધ્ય-બિંદુ છે. વઈ વધારવાથી તે અકને ફમાં મળે છે; તેા અફ=૩અક છે એમ બતાવેા.

૮૨. અવક એક ત્રિકોણ છે. વકનું ડ મધ્યબિંદુ છે. અકમાં ફ બિંદુ એવું લીધું છે, કે અફ=૩અક થાય છે. અડ, વફ એક બીજીને ફમાં છેદે છે; તેા અડનું ફ મધ્યબિંદુ છે, અને ફફ=૩વફ છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના ક્ષેત્ર ત્રિકોણમાં આપેલા એક બિંદુમાં એક બીજીને છેદે.

૮૪. અવકડ ચતુષ્કોણમાં પ બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તેા પવ+પવ+પક+પડનો સરવાળો બાજુમાં એછો થશે ?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં શિરોબિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ ?

૮૬. અવ પાવો અને અમાંથી પડતો વક ઉપરનો લંબ આપેલા છે; તેા અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી દોરો.

૮૭(અ). એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજાને છેદનારી બીજા બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ પૈકી એકની સામેનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ કયારે બને છે ?

૮૯. અથવા ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી ચક્રને સમાંતર ડઝઈ લીટી એવી દોરો કે $\text{ડઝઈ} = \text{કડ} + \text{કઈ}$ થાય.

૯૦. અથવા એક ત્રિકોણ છે, અને અમાંથી ચક્રને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે, તો વમાંથી ચક્રને પમાં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને વમાં મળે એવી એક લીટી એવી દોરો કે ચપ લીટી પદના $\frac{1}{2}$ બરાબર થાય.

૯૧. કડ લીટીની એકજ બાજુએ અ અને વ બિંદુઓ છે. કડમાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) તે બિંદુથી અ અને વનાં અંતરોની બાદબાકી ઓછામાં ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. અથવા એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને ડઈ, ફગ આ આપેલી લીટીઓ એક બીજાને છેદે છે. તો અથવા ત્રિકોણની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ ડઈ પર પડે અને એક શિરોબિંદુ ફગ પર પડે એવો, ત્રિકોણની રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. અથવા ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર વ અને વમાંથી દોરેલા લંબ ૧ : ૨ આ પ્રમાણમાં હોય.

૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણો આપ્યાં છે, તે ઉપરથી ચતુષ્કોણ દોરો.

૯૫. અ અને વ બિંદુઓ કડ લીટીની (૧) સામસામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, કડમાં પ બિંદુ એવું શોધી કાઢો, કે $\angle \text{અપક} = \angle \text{વપક}$ થાય.

૯૬. પાયાની સામેનો ખુણો અને પાયાની પાસેનો એક ખુણો એ બેનો સરવાળો આપ્યો છે; તો આપેલા પાયા પર સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. અથવા ત્રિકોણની અંબ અને અક આ સરખી બાજુઓમાં ક્ષ અને ચ બિંદુઓ એવાં લો, કે $વક્ષ = ક્ષચ = ચક$ થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલા બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો તેનો ગાળો આપેલી લંબાઈનો થાય. એમ કરવું કયારે અશક્ય થાય છે ?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

- (૧) અ+વ, ક, \angle અ.
- (૨) વ-ક, અ, \angle ક.
- (૩) ક, \angle વ અને પરિમિતિ.
- (૪) કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.
- (૫) વ+ક, અ, \angle અ.
- (૬) વ-ક, અ, \angle અ.
- (૭) અ, ક-વ, \angle ક- \angle વ.
- (૮) અ, ક+વ, \angle ક+ \angle વ.
- (૯) અ, \angle અ, \angle વ- \angle ક.
- (૧૦) અ=૨", \angle અ=૪૦°, \angle વ- \angle ક=૨૦°.
- (૧૧) અ+વ=૩", ક=૨.૬", \angle ક=૧૨૦°.
- (૧૨) અ=૪", ક-વ=૧.૪૫", \angle અ=૬૦°.
- (૧૩) અ+વ=૩.૭", ક=૭૫", \angle અ=૬૨°.
- (૧૪) પરિમિતિ=૫", \angle અ=૪૨°, \angle વ=૩૬°.
- (૧૫) ક=૨.૪", વ-અ=૧.૬", \angle વ- \angle અ=૬૫°.
- (૧૬) વ=૧.૧", ક+અ=૩.૧", \angle ક- \angle અ=૬૦°.

પરિશિષ્ટ બ.



પ્રશ્નો છોડવાની પદ્ધત્તરણ પદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથમાં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એવું છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોડવા એને ઉપયોગ કરત નાવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોડવાઓમાં ઉત્પન્ન કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય થાય છે, કે પ્રશ્નનો ઉત્તર આવડે એ એક નસીબની વાત છે. પરંતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં ફત્તેહગંદ ઉતરવા માટે સ્વાભાવિક યુક્તિ એક આવશ્યક બાબત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહિતી અને મહાવરો એ બાબતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોડવા એને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટેવ પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે ખીણ કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હમેશની જે પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ બાબત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ યોગ્યતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જોતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ બાબત અ સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન જ આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને જ મેળવવા માટે ક પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે,

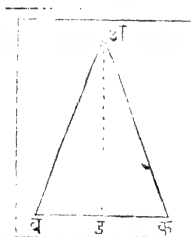
એટલે આ કારણોની પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં કનું સાધન હ છે, અને હનું સાધન ક છે, અને ક આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે ક આપણને અનુકૂળ છે, માટે ક પરથી હ, અને હ પરથી ક અનુકૂળ કરી લેવું; અને ક અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી ક અને ક પરથી જ સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે, એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા ભલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી જ અધિકારીના હાથમાં છે, તે અધિકારી પાસે જનું વજન છે, જ, કનો સ્નેહી છે, પણ કની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે કના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઝોળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં કના સ્નેહીઓમાં આપણો ઝોળખીતો માણસ જણ્યો, એટલે તેની મારફતે કને મળી, કની મદદથી જને અને જની મદદથી જને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (ધૃષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી ખીજ બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે કે કોઈ પણ ધૃષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવે એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતા જઈએ છીએ, અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાબામાંનું અથવા આપણું જણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે ધૃષ્ટ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકારવો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કદપના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કંઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાબામાંની અથવા આપણી જણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે ધૃષ્ટવસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ(નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જણ્યો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન છેડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે.

જે સત્ય સાખીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનભૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતા, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉલટો ક્રમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે સરખા ભાગ કરે છે.



અહીં સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેના ખુણા દુભાગનારી લીટી અંક છે. તે ઢ બિંદુમાં ચક્રના બે સરખા ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

ચક્ર, ઢકની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ? બે લીટીઓ અસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણ-

• માંના બે સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ..... વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર જડતો નથી. બીજી કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી ઠરવા માટે, એટલે \triangle અડક અને \triangle અડક એકરૂપ ઠરવા માટે, કઈ બાબતો ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ ઠરવા માટે બંનેની ત્રણે બાજુઓ અરસ-પરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બધી બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખા હોવાં જોઈએ, અથવા.....વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી, પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે અડ, અડ બાજુઓ અને \angle અડ અનુક્રમે અડ, અડ બાજુઓ અને \angle કડની બરાબર છે.

વડ અને કડ એક બીજીની બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જેતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆથી પાછળ પાછળ જઈએ, તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∴ વડ અને અડ ત્રિકોણોમાં—

વડ = કડ,

અડ બંનેમાં સાધારણ;

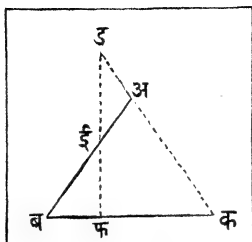
\angle વડ = \angle કડ,

∴ \triangle વડ = \triangle કડ.

∴ વડ = કડ.

ઉદાહરણ ૨.

અડક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની કડ બાજુ ઢ સુધી વધારી છે; અડમાંથી અડ જેટલો અડ લાગ કાપી કાઢ્યો છે; વકને ફ બિંદુમાં મળતાં સુધી ઢઈને વધારી છે; તો \angle ઢક એક કારખુણો છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

\angle ડફક કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

$$\angle \text{ડફક} = \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ}. \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડફક} = \angle \text{ફવઈ} + \angle \text{વઈફ}; \quad (\text{પ્ર. ૮, ઉ. ૩})$$

$$\therefore \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવઈ} + \angle \text{વઈફ} (= \angle \text{અઈડ}).$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવઈ},$$

\therefore ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો—

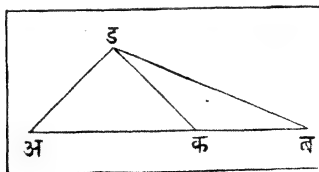
$$\text{શેષ } \angle \text{ફડક} = \text{શેષ } \angle \text{અઈડ}.$$

હવે $\angle \text{ફડક} = \angle \text{અઈડ}$ એ પ્રકાર છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી $\angle \text{ડફક}$ કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

એકીકરણ (સ્પષ્ટ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તેમાંના એક પરનો ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પૃથક્કરણ.

અવ આપેલી લીટી છે. ધારો કે તેના ક બિંદુમાં માગ્યા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $અક^૨ = ૨બક^૨$ હોય, તો અક જેનો કર્ણ હોય એવા સમઘિબાજી કાટખુણા ત્રિકોણની એક બાજીના વર્ગની બરાબર લકનો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો અકહ ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે \angle અકહ, \angle કઅહ, દરેક ૪૫° નો કરો.

$$\therefore કહ^૨ = કબ^૨,$$

$$\therefore કહ = કબ.$$

$$\therefore \angle$$
બહક $= \angle$ કબહ.

$$\therefore અહ = કહ,$$

$$\therefore \angle$$
હઅક $= \angle$ હકઅ $= \frac{૧}{૨}$ કાટખુણો;

$$(\text{કારણ કે } \angle$$
અહક $= ૧ \text{ કાટખુણો.}) \quad (૨૪ના)$

$$\therefore \angle$$
હકબ બહારનો ખુણો $= ૧\frac{૧}{૨}$ કાટખુણો. $(પ્ર. ૧)$

$$\therefore \angle$$
કહબ $+$ \angle કબહ $= \frac{૩}{૨}$ કાટખુણો. $(પ્ર. ૮)$

$$\therefore \angle$$
કબહ $= \frac{૧}{૨}$ કાટખુણો, અને \angle કહબ $= \frac{૧}{૨}$ કાટખુણો.

હવે અવહ ત્રિકોણના \angle બઅહ અને \angle અવહ આપણે જાણીએ છીએ, અને હકબ ત્રિકોણના પણ બધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણો કાઢી શકાશે; અર્થાત્ ક બિંદુનું રચણ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

$$\angle$$
બઅહ $\frac{૧}{૨}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

$$\angle$$
અવહ $\frac{૧}{૨}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

$$\angle$$
બહક $\frac{૧}{૨}$ કાટખુણા બરાબર કરો.

ક ધજ બિંદુ છે.

ક્રમવિરૂદ્ધ સિદ્ધતા.

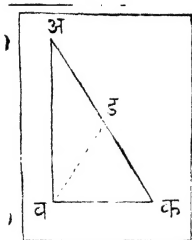
કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે ક્યાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષથી વિરુદ્ધ બાબતો

ઉત્પન્ન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી દરેક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપવી વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે બે વિકલ્પ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડભરેલો હોય છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અબક કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. ઢ, અકર્તુ મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—બઢ = અઢ = ઢક.

સિદ્ધતા—કઢ અથવા અઢની બરાબર બઢ ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી. તે નાની હોય તો—

\angle બઝઢ $<$ \angle અબઢ થાય,

અને \angle બકઢ $<$ \angle કબઢ થાય,

એટલે (\angle બઝઢ + \angle બકઢ) $<$ \angle અબક થાય.

અને મોટી હોય તો—

(\angle બઝક + \angle બકઝ) $>$ \angle અબક થાય;

પણ એમાંની એક પણ બાબત શક્ય નથી;

કારણ કે \angle અબક = ૧ કાટખુણો છે; અર્થાત \angle બઝક +

\angle બકઝ = \angle અબક છે.

માટે બઢ, અઢથી નાની પણ નથી, અને મોટી પણ નથી; એટલે બંને સરખી છે.

ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગના છે. વિધાર્થીએ માપણી કરીને આપવાના ઉત્તરોમાં $\frac{1}{4}^{\circ}$ ઇંચ જેટલી અથવા એકાદ અંશ જેટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.)

પૃષ્ઠ ૧૩-૧૫.

- પ્ર. ૧. ૧.૬"; ૪૦ મિ. મી,
 પ્ર. ૪. પહેલી લીટી=૪૦ મિ. મી; ૧.૬".
 બીજી લીટી=૪૯ મિ. મી; ૧.૯૫".
 પ્ર. ૫. અક=૮"; ક.ચ=૪"; અચ=૧.૨".
 પ્ર. ૬. અક=૬"; ક.હ=૪"; હ.ચ=૧"; અચ=૧.૩".
 પ્ર. ૭. અચ=૧.૭૫"; અક=૮.૫"; ક.ચ=૪".

પૃષ્ઠ ૧૮-૨૦.

- પ્ર. ૨. પહેલું ક્ષેત્ર=૩', ૨"; બીજું ક્ષેત્ર ૨', ૧ $\frac{1}{2}$ "; ત્રીજું ક્ષેત્ર=૨', ૭".
 પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.
 પ્ર. ૧૧. ૧૦'. પ્ર. ૧૨. ૪૧'. પ્ર. ૧૩. ૩૭.૨'.
 પ્ર. ૧૪. ૯.૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૫. ૭.૨ માઇલ.
 પ્ર. ૧૬. ૧૩.૩૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૭. ૩.૭૫ માઇલ.
 પ્ર. ૧૮. ૨૮૨.૮'.

પૃષ્ઠ ૪૨-૪૪.

- પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦°; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦°.
 પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણા.
 પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬°.
 પ્ર. ૪. ૫.૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧°.
 પ્ર. ૫. ૬ $\frac{1}{2}$ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫°.
 પ્ર. ૬. ૨૮.૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯°.
 પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬°; ૩.૬૫ માઇલ.
 પ્ર. ૮. ૪.૦૬૨૫ માઇલ.
 પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
 પ્ર. ૧૦. ૬ સેં. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭ $\frac{1}{2}$ હાથ.

(સમાપ્ત.)

